This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

GODFREY LOWELL CABOT
SCIENCE LIBRARY

HARVARD COLLEGE LIBRARY

MÉTHODES

NOUVELLES ET FACILES

DE CALCULER LES

PROGRESSIONS GÉNÉRATRICES

POUR FORMER LES PUISSANCES

ET EXTRAIRE LEURS RACINES.

IMPRIMERIE DE ALFRED COURCIER,
rue du Jardinet, n° 12.

MÉTHODES

NOUVELLES ET FACILES

DE CALCULER LES

PROGRESSIONS GÉNÉRATRICES

POUR FORMER LES PUISSANCES

ET EXTRAIRE LEURS RACINES,

DE MULTIPLIER ET DE DIVISER;

PAR M.-R.-A. BARAILON,
ANCIEN MAGISTRAT.

SECONDE ÉDITION,
REVUE, CORRIGÉE ET AUGMENTÉE.

PARIS,
BACHELIER PÈRE ET FILS, LIBRAIRES
POUR LES MATHÉMATIQUES,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1830

~~Math 688.30~~

QA
49
B37

2565
17

REMARQUES

PRÉLIMINAIRES.

Suivant la méthode ordinaire, la formation des puissances se fait par la multiplication ; l'extraction de la racine quarrée provient de la décomposition de ce polynome $a^2 + 2ab + b^2$; l'extraction de la racine cubique provient de cet autre polynome $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Ainsi, les préceptes généraux qui résultent de ces deux quantités algébriques deviennent d'autant plus difficiles à suivre que les nombres dont on veut extraire les racines quarrées ou cubiques sont grands. L'extraction des racines des quatrième, cinquième, etc., puissances, dépendante des règles qui dérivent des polynomes représentant ces différentes puissances, présente beaucoup plus de difficultés, et devient même impraticable.

Suivant notre méthode, la formation des puissances se fait par l'addition ; l'extraction des racines quarrées et cubiques des plus grands nombres, qui se fait principalement par l'addition, est aussi sûre que facile. Les règles que nous avons employées pour extraire les racines des quarrés et des cubes émanent naturellement de l'origine de ces deux

puissances, et proviennent essentiellement de chacune des manières dont elles sont formées.

Le calcul numérique est le calcul naturel des chiffres qui expriment séparément une valeur. Il est une lumière directe qui, en éclairant notre esprit et notre entendement, nous fait découvrir des méthodes simples, lumineuses et utiles dans les sciences mathématiques. C'est en décomposant, par la soustraction, les deuxième, troisième, quatrième, cinquième, sixième, septième, huitième, neuvième puissances que nous sommes parvenu à connaître les progressions arithmétiques de chacune d'elles. Nous appelons ces progressions arithmétiques *progressions génératrices*, par la raison qu'elles sont les principes générateurs et infaillibles d'où l'on part pour les former par la simple règle de l'addition.

Cette découverte, qui peut paraître importante, nous a conduit naturellement à en faire d'autres qui proviennent de différentes manières de sommer les termes de la progression génératrice des quarrés 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, etc., etc., pour former les troisième, quatrième, cinquième, etc., puissances, et pour extraire leurs racines. Tous les termes de cette série étant calculés jusqu'à l'infini, produisent jusqu'à l'infini les quarrés qui comprennent les puissances de tous les degrés pairs, c'est-à-dire les puissances des quatrième, sixième, huitième, etc., degrés. Ces puissances des degrés pairs étant comprises parmi les quarrés des nombres naturels formés successivement par les termes de la progression primitive 1,

3, 5, etc., etc., peuvent être également formés par les termes de cette même progression, qui a la propriété immuable d'opérer précisément ces diverses formations, en les calculant d'après les règles appropriées à chacune de ces puissances paires.

Mais les puissances des degrés impairs proviennent de deux produits. Le premier, qui est obtenu en calculant un nombre suffisant de termes de la progression primitive, est justement la puissance de la racine du degré pair, laquelle précède immédiatement celle du degré impair que nous cherchons. Le second produit s'opère de deux manières: la première consiste à multiplier le premier produit par la racine, c'est-à-dire à répéter ce premier produit, résultant d'un certain nombre de termes de la progression génératrice des quarrés, autant de fois que la racine a d'unités; la seconde consiste à multiplier chaque terme de la progression primitive par la racine, puis la somme qui résulte de l'addition des premier et dernier termes de cette série, ainsi augmentés, laquelle somme égale le double de la puissance postérieure à celle qui indique le nombre des termes à calculer et correspondante à la même racine, précisément par la moitié de cette puissance indicative. De là il suit que la progression génératrice des quarrés est l'origine de toutes les puissances.

Les principes qui nous ont servi à former ces diverses puissances, et qui émanent essentiellement de la progression génératrice des quarrés, source

féconde de leur formation, nous ont également servi pour l'extraction de leurs racines.

Telles sont les connaissances, aussi simples que faciles, qui résultent du calcul numérique, et qui vont être développées dans cet ouvrage; nous ne pensons pas qu'un autre quelconque eût pu le remplacer pour produire de semblables résultats.

Au reste, nous désirons bien que les sciences mathématiques, qui présentent assez de difficultés pour décourager beaucoup de lecteurs, se simplifient; leur simplicité contribuera sans doute à les faire aimer, propager et perfectionner.

Il nous paraît que les calculs sont d'autant plus simples et plus faciles qu'ils partent de leurs sources naturelles; ainsi, plus ils s'en éloignent, plus ils sont pénibles et difficiles.

TABLE

DES MATIÈRES.

Pages.

Remarques préliminaires..... v
Idée générale sur la formation des puissances..... 1

MÉTHODE

Facile et sûre pour former la deuxième puissance et extraire sa racine.

CHAPITRE PREMIER.

De la formation de la deuxième puissance..... 7

PREMIÈRE SECTION.

De la formation de la deuxième puissance des nombres naturels, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, etc., calculés jusqu'à 2100 dans le tableau premier..... 7

DEUXIÈME SECTION.

Article premier.

Règle de transition des unités de la racine à ses dixaines..... 42
Première suite du premier tableau..... 45
Formation des quarrés des dixaines de la racine qui suivent immédiatement les quarrés des 2100 unités..... 45

Article II.

Règle de transition des dixaines de la racine à ses centaines..... 46
Deuxième suite du premier tableau..... 48
Formation des quarrés des centaines de la racine qui suivent immédiatement les quarrés du nombre 2800..... 48

Article III.

Règle de transition des centaines de la racine à ses mille..... 49

Pages.

Troisième suite du premier tableau..... 51
Formation des quarrés des mille de la racine qui suivent immédiatement les quarrés du nombre 8000..... *ibid.*

Article IV.

Règle de transition des mille de la racine à ses dix mille..... 52
Quatrième suite du premier tableau..... 54
Formation des quarrés des dix mille de la racine qui suivent immédiatement les quarrés du nombre 70000..... *ibid.*

Article V.

Règle de transition des dix mille de la racine à ses cent mille..... 55
Cinquième suite du premier tableau..... 57
Formation des quarrés des cent mille de la racine qui suivent immédiatement les quarrés du nombre 1100000..... *ibid.*

Article VI.

Règle de transition des cent mille de la racine à ses millions..... 58
Sixième suite du premier tableau..... 60
Formation des quarrés des millions de la racine qui suivent immédiatement les quarrés du nombre 700000..... *ibid.*

Article VII.

Règle de transition des millions de la racine à ses dix millions..... 61
Septième suite du premier tableau..... 62
Formation des quarrés des dix millions de la racine qui suivent immédiatement les quarrés du nombre 50000000..... *ibid.*

Article VIII.

Règle de transition des dix millions de la racine à ses cent millions. 63
Huitième suite du premier tableau..... 65
Formation des quarrés des cent millions de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 400000000..... *ibid.*

TROISIÈME SECTION.

Retour et rapprochement des quarrés des dixaines de la racine depuis 2800000000 vers les quarrés de ses unités..... *ibid.*

Article premier.

Règle de transition des cent millions de la racine à ses dix millions. 67
Neuvième suite du premier tableau..... 68

Pages.

Formation des quarrés des dix millions de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 2000000000..... 68

Article II.

Règle de transition des dix millions de la racine à ses millions..... 70
Dixième suite du premier tableau..... 71
Formation des quarrés des millions de le racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 2960000000..... *ibid.*

Article III.

Règle de transition des millions de la racine à ses cent mille..... 72
Onzième suite du premier tableau..... 73
Formation des quarrés des cent mille de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 2998000000..... *ibid.*

Article IV.

Règle de transition des cent mille de la racine à ses dix mille..... 74
Douzième suite du premier tableau..... 75
Formation des quarrés des dix mille de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 2999800000..... *ibid.*

Article V.

Règle de transition des dix mille de la racine à ses mille..... 76
Treizième suite du premier tableau..... 77
Formation des quarrés des mille de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 2999980000..... *ibid.*

Article VI.

Règle de transition des mille de la racine à ses centaines..... 78
Quatorzième suite du premier tableau..... 79
Formation des quarrés des centaines de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 2999999800..... *ibid.*

Article VII.

Règle de transition des centaines de la racine à ses dixaines..... 80
Quinzième suite du premier tableau..... 81
Formation des quarrés des dixaines de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 2999999800..... *ibid.*

Article VIII.

Règle de transition des dixaines de la racine à ses unités..... 82
Seizième suite du premier tableau..... 83

Pages.

Formation des quarrés des unités de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 99999980. 83

QUATRIÈME SECTION.

Vérification des quarrés des racines ascendantes de dixaine en dixaine, et ainsi descendantes 84
Numéro I. 85
Numéro II. 86
Numéro III. 87
Numéro IV. 88
Numéro V. 89
Numéro VI. 90
Numéro VII. 91

CHAPITRE DEUXIÈME.

De l'extraction de la racine quarrée. 94

PREMIÈRE SECTION.

Première méthode d'extraire la racine quarrée. ..... *ibid.*
Exemple I. 103
Tableau de l'exemple I. 106
Tableau de l'exemple II. 109

DEUXIÈME SECTION.

Seconde méthode d'extraire la racine quarrée. 112
Exemple III. 115
Tableau de l'exemple III. 118
Tableau de l'exemple IV. 122

TROISIÈME SECTION.

Preuve d'un calcul exact sur l'extraction de la racine quarrée. 125
Numéros I, II, III, IV. ..... 126 à 128

MÉTHODE

Facile et sûre pour former les cubes et extraire leurs racines.

CHAPITRE PREMIER.

De la formation des cubes. 129

Pages.

PREMIÈRE SECTION.

De la formation des cubes des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, etc., calculés jusqu'à 400 dans le deuxième tableau. 129

DEUXIÈME SECTION.

Dixaines ascendantes de la racine vers l'infini dont on forme les cubes. 144

Article premier.

Règle de transition des unités de la racine à ses dixaines..... 147
Première suite du deuxième tableau..... 149
Formation des cubes des dixaines de la racine qui suivent immédiatement les cubes des 400 unités..... *ibid.*

Article II.

Règle de transition des dixaines de la racine à ses centaines..... 150
Deuxième suite du deuxième tableau..... 152
Formation des cubes des centaines de la racine qui suivent immédiatement les cubes du nombre 600..... *ibid.*

Article III.

Règle de transition des centaines de la racine à ses mille..... 153
Troisième suite du deuxième tableau..... 155
Formation des cubes des mille de la racine qui suivent immédiatement les cubes du nombre 3000..... *ibid.*

Article IV.

Règle de transition des mille de la racine à ses dix mille..... 156
Quatrième suite du deuxième tableau..... 159
Formation des cubes des dix mille de la racine qui suivent immédiatement les cubes du nombre 270000..... *ibid.*

Article V.

Règle de transition des dix mille de la racine à ses cent mille..... 160
Cinquième suite du deuxième tableau..... 162
Formation des cubes des cent mille de la racine qui suivent immédiatement les cubes du nombre 4600000..... *ibid.*

Article VI.

Règle de transition des cent mille de la racine à ses millions..... 168
Sixième suite du deuxième tableau..... 165
Formation des cubes des millions de la racine qui suivent immédiatement les cubes du nombre 65000000..... *ibid.*

Pages.

Article VII.

Règle de transition des millions de la racine à ses dix millions..... 166
Septième suite du deuxième tableau..... 169
Formation des cubes des dix millions de la racine qui suivent immédiatement les cubes du nombre 90000000..... *ibid.*

Article VIII.

Règle de transition des dix millions de la racine à ses cent millions. 170
Huitième suite du deuxième tableau..... 173
Formation des cubes des cent millions de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 400000000..... *ibid.*

TROISIÈME SECTION.

Dixaines descendantes de la racine vers ses unités, dont on forme les cubes..... 174

Article premier.

Règle de transition des cent millions de la racine à ses dix millions. 176
Formation des cubes des dixaines descendantes de la racine vers ses unités..... 178
Neuvième suite du deuxième tableau..... *ibid.*
Formation des cubes des dix millions de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 2800000000..... *ibid.*

Article II.

Règle de transition des dix millions de la racine à ses millions.. 179
Dixième suite du deuxième tableau..... 182
Formation des cubes des millions de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 2980000000..... *ibid.*

Article III.

Règle de transition des millions de la racine à ses cent mille.... 183
Onzième suite du deuxième tableau..... 185
Formation des cubes des cent mille de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 2998000000..... *ibid.*

Article IV.

Règle de transition des cent mille de la racine à ses dix mille.... 186
Douzième suite du deuxième tableau..... 188
Formation des cubes des dix mille de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 2999800000..... *ibid.*

Pages.

Article V.

Règle de transition des dix mille de la racine à ses mille..... 189
Treizième suite du deuxième tableau..... 191
Formation des cubes des mille de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 299998oooo..... *ibid.*

Article VI.

Règle de transition des mille de la racine à ses centaines..... 192
Quatorzième suite du deuxième tableau..... 194
Formation des cubes des centaines de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 2999998ooo..... *ibid.*

Article VII.

Règle de transition des centaines de la racine à ses dixaines..... 195
Quinzième suite du deuxième tableau..... 198
Formation des cubes des dixaines de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 29999998oo..... *ibid.*

Article VIII.

Règle de transition des dixaines de la racine à ses unités..... *ibid.*
Seizième suite du deuxième tableau..... 202
Formation des cubes des unités de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 299999998o..... *ibid.*

Récapitulation des seize articles compris dans les deuxième et troisième sections.

PREMIÈRE PARTIE.

Récapitulation des huit articles de la deuxième section..... 204

SECONDE PARTIE.

Récapitulation des huit articles de la troisième section..... 210

QUATRIÈME SECTION.

Preuve facile et sûre, pour nous faire connaître les vrais cubes des racines correspondantes..... 219
Sept tableaux comparatifs, destinés à vérifier les sept dernières suites du deuxième tableau..... 222

Pages.

CHAPITRE DEUXIÈME.

PREMIÈRE SECTION.

De l'extraction de la racine cubique..... 226
Exemple I..... 231
Exemple II..... 235
Exemple III..... 240
Exemple IV..... 243

DEUXIÈME SECTION.

Preuve d'un calcul exact sur l'extraction de la racine cubique, constatée par les nos I, II, III, IV..... 247
Exemple unique, où nous employons la formule arithmétique consistante à prendre le triple quarré de la racine correspondante, moins la même racine triplée, plus 1, laquelle égale chaque différence des cubes compris entre les racines correspondante et précédente, laquelle formule, additionnée avec le cube précédent, forme le cube de la racine correspondante..... 249

MÉTHODE NOUVELLE

Pour former les quatrièmes puissances et extraire leurs racines.

PREMIÈRE SECTION.

De la formation de la quatrième puissance..... 253

DEUXIÈME SECTION.

De l'extraction de la racine quatrième..... 266
Preuve d'un calcul exact sur l'extraction de la racine quatrième. 278
Tableau explicatif pour la formation de la quatrième puissance, où nous avons montré trois manières de calculer les quatrièmes puissances des racines correspondantes..... 280
Tableau où l'on voit chaque différence des quatrièmes puissances, composée d'autant de termes de la première série que chaque terme correspondant de la même série a d'unités..... 290
Formation des tableaux des cinquième, sixième, septième, huitième, neuvième puissances..... 294

NOUVELLE MÉTHODE

De former les cubes et d'extraire la racine cubique d'un nombre quelconque, résultante de la progression arithmétique 1, 3, 5, 7, etc.

CHAPITRE PREMIER.

Pages.

Formation des cubes des nombres 1, 2, 3, 4, etc., etc., et de leurs dixaines ascendantes..... 305

CHAPITRE DEUXIÈME.

Extraction de la racine cubique..... 313

Observation, où nous disons que la méthode pour l'extraction de la racine cubique est précisément la même que celle qu'on emploie pour la formation des cubes des nombres..... 329

Tableau explicatif, tant pour la formation des cubes des nombres que pour l'extraction de leurs racines..... 330

FORMATION

De la quatrième puissance et extraction de sa racine, résultantes de la progression arithmétique 1, 3, 5, 7, etc.

CHAPITRE PREMIER.

Formation de la quatrième puissance..... 335

PREMIÈRE SECTION.

Formation de la quatrième puissance des nombres naturels 1, 2, 3, 4, etc., etc..... *ibid.*

DEUXIÈME SECTION.

Transition des unités aux dixaines ascendantes..... 339

CHAPITRE DEUXIEME.

Extraction de la racine quatrième, faite selon cette nouvelle méthode..... 342

Tableau explicatif des quatrièmes puissances, fait selon la nouvelle méthode..... 347

FORMATION

De la cinquième puissance et extraction de sa racine.

CHAPITRE PREMIER.

Pages.
Formation de la cinquième puissance..... 351

CHAPITRE DEUXIEME.

Extraction de sa racine..... 355
Tableau de la cinquième puissance..... 358

FORMATION

De la sixième puissance et extraction de sa racine.

CHAPITRE PREMIER.

Formation de la sixième puissance..... 360

CHAPITRE DEUXIÈME.

Extraction de la racine sixième..... 364
Tableau de la sixième puissance..... 367

FORMATION

De la septième puissance et extraction de sa racine.

CHAPITRE PREMIER.

Formation de la septième puissance..... 368

CHAPITRE DEUXIÈME.

Extraction de la racine septième..... 372
Tableau de la septième puissance..... 376

FORMATION

De la huitième puissance et extraction de sa racine.

CHAPITRE PREMIER.

Formation de la huitième puissance..... 378

CHAPITRE DEUXIÈME.

Pages.

Extraction de la racine huitième..... 382
Tableau de la huitième puissance..... 384

FORMATION

De la neuvième puissance et extraction de sa racine.

CHAPITRE PREMIER.

Formation de la neuvième puissance..... 385

CHAPITRE DEUXIÈME.

Extraction de la racine neuvième..... 389
Tableau de la neuvième puissance..... 393
Récapitulation des règles employées à former les puissances et à extraire leurs racines, résultantes de la progression génératrice des quarrés 1, 3, 5, 7, etc., etc..... 394
Juste application des règles précédentes sur d'autres puissances postérieures, et sur l'extraction de leurs racines..... 404
Tableau général des puissances résultantes de la progression génératrice des quarrés 1, 3, 5, 7, etc., etc., dont les termes ont été calculés d'après des règles appropriées à chaque puissance..... 411
Réflexion sur le calcul numérique..... 417

DE LA MULTIPLICATION.

Changer la multiplication en addition et en soustraction, pour trouver le produit du multiplicande par le multiplicateur, c'est-à-dire prendre la moitié de la somme du multiplicande et du multiplicateur, et la moitié de leur différence; ôter le quarré de la moitié de leur différence, du quarré de la moitié de leur somme, pour avoir le produit de ces deux facteurs..... 419
Tableau sur la nouvelle méthode de se servir de l'addition et de la soustraction, pour trouver le produit d'un nombre multiplié par un autre, lequel résulte surtout de la facilité à former les quarrés naturels des nombres, en additionnant successivement les termes de la progression arithmétique 1, 3, 5, 7, etc., etc... 427
Observation générale sur la multiplication et la division..... 430
Tableau des quarrés et des cubes, servant à trouver les produits

Pages

des multiplicandes par les multiplicateurs, et les quotiens des dividendes par les diviseurs..... 43
Deuxième méthode de trouver le produit du multiplicande par le multiplicateur..... 44
Abréger la division, ou trouver plus brièvement les quotiens des nombres divisés par d'autres..... 45
Précis des règles de la multiplication et de la division..... 46
Seconde méthode de la formation des quarrés et des cubes..... 46
Second tableau sur la formation des quarrés et des cubes..... 47
Première suite de la multiplication..... 47
Première suite de la division..... 48
Troisième méthode de la formation des quarrés et des cubes..... 48
Troisième tableau sur la formation des quarrés et des cubes.... 486
Seconde suite de la multiplication..... 492
Seconde suite de la division..... 502
Précis des règles de la multiplication et de la division..... *ibid.*
Remarques finales..... 523

MÉTHODES

NOUVELLES ET FACILES

DE CALCULER

LES PROGRESSIONS GÉNÉRATRICES

ET D'EXTRAIRE LEURS RACINES.

IDÉE GÉNÉRALE

SUR LA FORMATION DES PUISSANCES.

Les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, etc., etc., qui ont un pour différence constante entre tous leurs termes même poussés jusqu'à l'infini, sont les racines de toutes les puissances. Ces nombres naturels élevés, successivement et suivant leur ordre numérique, à la seconde, troisième, quatrième, cinquième, sixième, etc., puissance, suivent invariablement une marche sûre et progressive, par la même raison que les racines conservant toujours entre elles la même différence, chaque puissance qui, dans sa formation, suit l'ordre naturel des nombres, doit avoir nécessairement, dans le principe, une disposition de nombres progressifs, et conservant toujours entre eux la même différence.

Donc toutes les puissances des nombres naturels sont subordonnées à des lois particulières, progressives et génératrices, dont la différence entre leurs termes est constante.

Pour trouver les progressions génératrices des 2e, 3e, 4e, 5e, 6e, 7e, 8e et 9e puissances, qui sont les lois particulières et primordiales de chacune d'elles auxquelles elles sont subordonnées, nous avons élevé les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, etc., à ces différentes puissances, ensuite nous les avons décomposées, par la soustraction, jusqu'à ce que nous ayons obtenu une série de termes qui aient entre eux la même différence, et qui par cela même sont leurs progressions génératrices.

Plus la puissance est élevée, plus les termes de la progression génératrice sont difficiles à obtenir, par la raison que les premiers termes de la colonne destinée pour la progression génératrice ont une différence variable entre eux, et qu'on ne trouve qu'après ceux-ci les termes dont la différence est constante.

Plus la puissance est petite, plus son principe générateur est rapproché de la puissance; plus aussi la différence de ses termes est petite, plus la puissance est élevée; plus son principe générateur est éloigné de la puissance, plus aussi la différence de ses termes est grande.

Les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, etc., etc., qui sont les racines de la première puissance, sont en même temps les termes de la progression génératrice et ceux de la première puissance; par conséquent, les racines, les termes de la progression génératrice de la première puissance et les

termes de cette même puissance sont numériquement identiques.

Les termes de la progression génératrice de la seconde puissance sont 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, etc., etc., dont 2 est la différence constante. L'addition successive de ses termes forme les quarrés des nombres naturels.

Les termes de la progression génératrice de la troisième puissance sont 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, etc., etc., dont 6 est la différence constante. L'addition successive de 1, premier terme de la suite des différences des cubes et des termes de la progression génératrice, produit la suite des différences des cubes, et l'addition successive des termes de cette suite produit les cubes.

Les termes de la progression génératrice de la quatrième puissance sont 0, 12, 36, 60, 84, 108, 132, 156, etc., etc., dont 24 est la différence constante. L'addition successive de 2, premier terme de la deuxième série des différences et des termes de la progression génératrice, produit les termes de la deuxième série. L'addition successive de 1, premier terme de la première série des différences et des termes de la deuxième série, produit les termes de la première série des différences; et l'addition successive des termes de cette première série produit la quatrième puissance des nombres naturels.

Les termes de la progression génératrice de la cinquième puissance sont 0, 120, 240, 360, 480, 600, 720, 840, etc., dont 120 est la différence constante. La formation de cette puissance et des suivantes se fait de la même manière que les précédentes.

Les termes de la progression génératrice de la sixième puissance sont 0, 420, 1080, 1800, 2520, 3240, 3960, 4680, etc., etc., dont 720 est la différence constante, et commencent entre 1080 et 1800, deux termes de cette progression.

Les termes de la progression génératrice de la septième puissance sont 0, 120, 1440, 5160, 10080, 15120, 20160, 25200, etc., etc., dont 5040 est la différence constante, et commencent entre 10080 et 15120, deux termes de cette progression.

Les termes de la progression génératrice de la huitième puissance sont 0, 250, 4790, 24950, 60729, 100801, 141120, 181440, etc., etc., dont 40320 est la différence constante, et commencent, entre 141120 et 181440, deux termes de cette progression.

Les termes de la progression génératrice de la neuvième puissance sont 0, 510, 15600, 118980, 378480, 726270, 1088640, 1451520, etc., etc., dont 362880 est la différence constante, et commencent entre 1088640 et 1451520, deux termes de cette progression.

Il est aisé de connaître la différence des termes de la progression génératrice de chaque puissance, en multipliant chaque différence par l'exposant de la puissance suivante. Des exemples rendront sensible cette vérité.

Si nous multiplions 2, qui est la différence constante entre les termes de la progression génératrice de la deuxième puissance, par 3, l'exposant de la troisième puissance; nous obtiendrons 6, qui est la différence constante entre les termes de la progression génératrice de la troisième puissance.

Si nous multiplions 6 par 4, l'exposant de la quatrième puissance, nous obtiendrons 24, qui est la différence constante entre les termes de la progression génératrice de la quatrième puissance.

Si nous multiplions 24 par 5, l'exposant de la cinquième puissance, nous obtiendrons 120, qui est la différence constante entre les termes de la progression génératrice de la cinquième puissance.

Si nous multiplions 120 par 6, l'exposant de la sixième puissance, nous obtiendrons 720, qui est la différence constante entre les termes de la progression génératrice de la sixième puissance.

Si nous multiplions 720 par 7, l'exposant de la septième puissance, nous obtiendrons 5040, qui est la différence constante entre les termes de la progression génératrice de la septième puissance.

Si nous multiplions 5040 par 8, l'exposant de la huitième puissance, nous obtiendrons 40320, qui est la différence constante entre les termes de la progression génératrice de la huitième puissance.

Si nous multiplions 40320 par 9, l'exposant de la neuvième puissance, nous obtiendrons 362880, qui est la différence constante entre les termes de la progression génératrice de la neuvième puissance.

Dans la formation des puissances suivantes, y compris la colonne des racines, la seconde puissance a trois colonnes, la troisième en a quatre, la quatrième en a cinq, la cinquième en a six, la sixième en a sept, la septième en a huit, la huitième en a neuf, la neuvième en a dix; et ainsi de suite.

La connaissance de la différence constante des termes de la progression génératrice de chaque puissance, et la connaissance du nombre des colonnes nécessaire pour leur formation, sont deux signes indicateurs pour nous faire trouver les progressions génératrices de chacune d'elles.

MÉTHODE

FACILE ET SURE

POUR FORMER LA DEUXIÈME PUISSANCE

ET EXTRAIRE SA RACINE.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA FORMATION DE LA DEUXIÈME PUISSANCE.

SECTION PREMIÈRE.

De la formation de la deuxième puissance des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, *etc., etc., calculés jusqu'à* 2100.

Les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, etc., etc., sont une série qui est une progression arithmétique croissante, dont la différence est toujours 1; leurs quarrés 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 54, 81, 100, etc., etc., sont une suite de grandeurs numériques qui varient à chaque terme, puisque la différence de 4 à 1 est 3, de 9 à 4 est 5, de 16 à 9 est 7, de 25 à 16 est 9, de 36 à 25 est 11, de 49 à 36 est 13, de 64 à 49 est 15, de 81 à 64 est 17, de 100 à 81 est 19.

Mais les différences des quarrés des nombres naturels 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, etc., etc., sont une série de termes qui suivent la même loi, dont la différence 2 est constante, et

qui est une progression arithmétique, à laquelle nous donnons 1 pour premier terme. Désormais nous l'appellerons *progression génératrice,* par la raison qu'elle sert à former tous les quarrés des nombres naturels, pris selon leur ordre et calculés jusqu'à l'infini, en additionnant successivement ses termes.

En effet, 1 égale 1, le quarré de 1; 1 plus 3 égalent 4, le quarré de 2; 4 plus 5 égalent 9, le quarré de 3; 9 plus 7 égalent 16, le quarré de 4; 16 plus 9 égalent 25, le quarré de 5; 25 plus 11 égalent 36, le quarré de 6; 36 plus 13 égalent 49, le quarré de 7; 49 plus 15 égalent 64, le quarré de 8; 64 plus 17 égalent 81, le quarré de 9; 81 plus 19 égalent 100, le quarré de 10; 100 plus 21 égalent 121, le quarré de 11; 121 plus 23 égalent 144, le quarré de 12; 144 plus 25 égalent 169, le quarré de 13; 169 plus 27 égalent 196, le quarré de 14; 196 plus 29 égalent 225, le quarré de 15; 225 plus 31 égalent 256, le quarré de 16; 256 plus 33 égalent 289, le quarré de 17; 289 plus 35 égalent 324, le quarré de 18; 324 plus 37 égalent 361, le quarré de 19; 361 plus 39 égalent 400, le quarré de 20; ainsi de suite. Il est évident que l'addition successive des termes de la progression arithmétique croissante 1, 3, 5, 7, 9, 11, etc., etc., forme tous les quarrés des nombres naturels, même calculés jusqu'à l'infini. (*Voy.* le tableau premier.)

PREMIER TABLEAU.

Racines.	Quarrés.	Progression génératrice.	Racines.	Quarrés.	Progression génératrice.
1	1	1	31	961	61
2	4	3	32	1024	63
3	9	5	33	1089	65
4	16	7	34	1156	67
5	25	9	35	1225	69
6	36	11	36	1296	71
7	49	13	37	1369	73
8	64	15	38	1444	75
9	81	17	39	1521	77
10	100	19	40	1600	79
11	121	21	41	1681	81
12	144	23	42	1764	83
13	169	25	43	1849	85
14	196	27	44	1936	87
15	225	29	45	2025	89
16	256	31	46	2116	91
17	289	33	47	2209	93
18	324	35	48	2304	95
19	361	37	49	2401	97
20	400	39	50	2500	99
21	441	41	51	2601	101
22	484	43	52	2704	103
23	529	45	53	2809	105
24	576	47	54	2916	107
25	625	49	55	3025	109
26	676	51	56	3136	111
27	729	53	57	3249	113
28	784	55	58	3364	115
29	841	57	59	3481	117
30	900	59	60	3600	119

Racines.	Quarrés.	Progrès. générat.	Racines.	Quatrés.	Progres. générat.
61	3721	121	96	9216	191
62	3844	123	97	9409	193
63	3969	125	98	9604	195
64	4096	127	99	9801	197
65	4225	129	100	10000	199
66	4356	131	101	10201	201
67	4489	133	102	10404	203
68	4624	135	103	10609	205
69	4761	137	104	10816	207
70	4900	139	105	11025	209
71	5041	141	106	11236	211
72	5184	143	107	11449	213
73	5329	145	108	11664	215
74	5476	147	109	11881	217
75	5625	149	110	12100	219
76	5776	151	111	12321	221
77	5929	153	112	12544	223
78	6084	155	113	12769	225
79	6241	157	114	12996	227
80	6400	159	115	13225	229
81	6561	161	116	13456	231
82	6724	163	117	13689	233
83	6889	165	118	13924	235
84	7056	167	119	14161	237
85	7225	169	120	14400	239
86	7396	171	121	14641	241
87	7569	173	122	14884	243
88	7744	175	123	15129	245
89	7921	177	124	15376	247
90	8100	179	125	15625	249
91	8281	181	126	15876	251
92	8464	183	127	16129	253
93	8649	185	128	16384	255
94	8836	187	129	16641	257
95	9025	189	130	16900	259

Racines.	Quarrés.	Progres. générat.	Racines.	Quarrés.	Progres. générat.
131	17161	261	166	27556	331
132	17424	263	167	27889	333
133	17689	265	168	28224	335
134	17956	267	169	28561	337
135	18225	269	170	28900	339
136	18496	271	171	29241	341
137	18769	273	172	29584	343
138	19044	275	173	29929	345
139	19321	277	174	30276	347
140	19600	279	175	30625	349
141	19881	281	176	30976	351
142	20164	283	177	31329	353
143	20449	285	178	31684	355
144	20736	287	179	32041	357
145	21025	289	180	32400	359
146	21316	291	181	32761	361
147	21609	293	182	33124	363
148	21904	295	183	33489	365
149	22201	297	184	33856	367
150	22500	299	185	34225	369
151	22801	301	186	34596	371
152	23104	303	187	34969	373
153	23409	305	188	35344	375
154	23716	307	189	35721	377
155	24025	309	190	36100	379
156	24336	311	191	36481	381
157	24649	313	192	36864	383
158	24964	315	193	37249	385
159	25281	317	194	37636	387
160	25600	319	195	38025	389
161	25921	321	196	38416	391
162	26244	323	197	38809	393
163	26569	325	198	39204	395
164	26896	327	199	39601	397
165	27225	329	200	40000	399

Racines.	Quarrés.	Progres. générat.	Racines.	Quarrés.	Progres. générat.
201	40401	401	236	55696	471
202	40804	403	237	56169	473
203	41209	405	238	56644	475
204	41616	407	239	57121	477
205	42025	409	240	57600	479
206	42436	411	241	58081	481
207	42849	413	242	58564	483
208	43264	415	243	59049	485
209	43681	417	244	59536	487
210	44100	419	245	60025	489
211	44521	421	246	60516	491
212	44944	423	247	61009	493
213	45369	425	248	61504	495
214	45796	427	249	62001	497
215	46225	429	250	62500	499
216	46656	431	251	63001	501
217	47089	433	252	63504	503
218	47524	435	253	64009	505
219	47961	437	254	64516	507
220	48400	439	255	65025	509
221	48841	441	256	65536	511
222	49284	443	257	66049	513
223	49729	445	258	66564	515
224	50176	447	259	67081	517
225	50625	449	260	67600	519
226	51076	451	261	68121	521
227	51529	453	262	68644	523
228	51984	455	263	69169	525
229	52441	457	264	69696	527
230	52900	459	265	70225	529
231	53361	461	266	70756	531
232	53824	463	267	71289	533
233	54289	465	268	71824	535
234	54756	467	269	72361	537
235	55225	469	270	72900	539

Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.	Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.
271	73441	541	306	93636	611
272	73984	543	307	94249	613
273	74529	545	308	94864	615
274	75076	547	309	95481	617
275	75625	549	310	96100	619
276	76176	551	311	96721	621
277	76729	553	312	97344	623
278	77284	555	313	97969	625
279	77841	557	314	98596	627
280	78400	559	315	99225	629
281	78961	561	316	99856	631
282	79524	563	317	100489	633
283	80089	565	318	101124	635
284	80656	567	319	101761	637
285	81225	569	320	102400	639
286	81796	571	321	103041	641
287	82369	573	322	103684	643
288	82944	575	323	104329	645
289	83521	577	324	104976	647
290	84100	579	325	105625	649
291	84681	581	326	106276	651
292	85264	583	327	106929	653
293	85849	585	328	107584	655
294	86436	587	329	108241	657
295	87025	589	330	108900	659
396	87616	591	331	109561	661
297	88209	593	332	110224	663
298	88804	595	333	110889	665
299	89401	597	334	111556	667
300	90000	599	335	112225	669
301	90601	601	336	112896	671
302	91204	603	337	113569	673
303	91809	605	338	114244	675
304	92416	607	339	114921	677
305	93025	609	340	115600	679

Racines.	Quarrés.	Progres. générat.	Racines.	Quarrés.	Progres. générat.
341	116281	681	376	141376	751
342	116964	683	377	142129	753
343	117649	685	378	142884	755
344	118336	687	379	143641	757
345	119025	689	380	144400	759
346	119716	691	381	145161	761
347	120409	693	382	145924	763
348	121104	695	383	146689	765
349	121801	697	384	147456	767
350	122500	699	385	148225	769
351	123201	701	386	148996	771
352	123904	703	387	149769	773
363	124609	705	388	150544	775
354	125316	707	389	151321	777
355	126025	709	390	152100	779
356	126736	711	391	152881	781
357	127449	713	392	153664	783
358	128164	715	393	154449	785
359	128881	717	394	155236	787
360	129600	719	395	156025	789
361	130321	721	396	156816	791
362	131044	723	397	157609	793
363	131769	725	398	158404	795
364	132496	727	399	159201	797
365	133225	729	400	160000	799
366	133956	731	401	160801	801
367	134689	733	402	161604	803
368	135424	735	403	162409	805
369	136161	737	404	163216	807
370	136900	739	405	164025	809
371	137641	741	406	164836	811
372	138384	743	407	165649	813
373	139129	745	408	166464	815
374	139876	747	409	167281	817
375	140625	749	410	168100	819

Racines.	Quarrés.	Progres. générat.	Racines.	Quarrés.	Progres. générat.
411	168921	821	446	198916	891
412	169744	823	447	199809	893
413	170569	825	448	200704	895
414	171396	827	449	201601	897
415	172225	829	450	202500	899
416	173056	831	451	203401	901
417	173889	833	452	204304	903
418	174724	835	453	205209	905
419	175561	837	454	206116	907
420	176400	839	455	207025	909
421	177241	841	456	207936	911
422	178084	843	457	208849	913
423	178929	845	458	209764	915
424	179776	847	459	210681	917
425	180625	849	460	211600	919
426	181476	851	461	212521	921
427	182329	853	462	213444	923
428	183184	855	463	214369	925
429	184041	857	464	215296	927
430	184900	859	465	216225	929
431	185761	861	466	217156	931
432	186624	863	467	218089	933
433	187489	865	468	219024	935
434	188356	867	469	219961	937
435	189225	869	470	220900	939
436	190096	871	471	221841	941
437	190969	873	472	222784	943
438	191844	875	473	223729	945
439	192721	877	474	224676	947
440	193600	879	475	225625	949
441	194481	881	476	226576	951
442	195364	883	477	227529	953
443	196249	885	478	228484	955
444	197136	887	479	229441	957
445	198025	889	480	230400	959

Racines n	Quarrés.	Progres générat.	Racines.	Quarrés.	Progres. générat.
481	231361	961	516	266256	1031
482	232324	963	517	267289	1033
483	233289	965	518	268324	1035
484	234256	967	519	269361	1037
485	235225	969	520	270400	1039
486	236196	971	521	271441	1041
487	237169	973	522	272484	1043
488	238144	975	523	273529	1045
489	239121	977	524	274576	1047
490	240100	979	525	275625	1049
491	241081	981	526	276676	1051
492	242064	983	527	277729	1053
493	243049	985	528	278784	1055
494	244036	987	529	279841	1057
495	245025	989	530	280900	1059
496	246016	991	531	281961	1061
497	247009	993	532	283024	1063
498	248004	995	533	284089	1065
499	249001	997	534	285156	1067
500	250000	999	535	286225	1069
501	251001	1001	536	287296	1071
502	252004	1003	537	288369	1073
503	253009	1005	538	289444	1075
504	254016	1007	539	290521	1077
505	255025	1009	540	291600	1079
506	256036	1011	541	292681	1081
507	257049	1013	542	293764	1083
508	258064	1015	543	294849	1085
509	259081	1017	544	295936	1087
510	260100	1019	545	297025	1089
511	261121	1021	546	298116	1091
512	262144	1023	547	299209	1093
513	263169	1025	548	300304	1095
514	264196	1027	549	301401	1097
515	265225	1029	550	302500	1099

Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.	Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.
551	303601	1101	586	343396	1171
552	304704	1103	587	344569	1173
553	305809	1105	588	345744	1175
554	306916	1107	589	346921	1177
555	308025	1109	590	348100	1179
556	309136	1111	591	349281	1181
557	310249	1113	592	350464	1183
558	311364	1115	593	351649	1185
559	312481	1117	594	352836	1187
560	313600	1119	595	354025	1189
561	314721	1121	596	355216	1191
562	315844	1123	597	356409	1193
563	316969	1125	598	357604	1195
564	318096	1127	599	358801	1197
565	319225	1129	600	360000	1199
566	320356	1131	601	361201	1201
567	321489	1133	602	362404	1203
568	322624	1135	603	363609	1205
569	323761	1137	604	364816	1207
570	324900	1139	605	366025	1209
571	326041	1141	606	367236	1211
572	327184	1143	607	368449	1213
573	328329	1145	608	369664	1215
574	329476	1147	609	370881	1217
575	330625	1149	610	372100	1219
576	331776	1151	611	373321	1221
577	332929	1153	612	374544	1223
578	334084	1155	613	375769	1225
579	335241	1157	614	376996	1227
580	336400	1159	615	378225	1229
581	337561	1161	616	379456	1231
582	338724	1163	617	380689	1233
583	339889	1165	618	381924	1235
584	341056	1167	619	383161	1237
585	342225	1169	620	384400	1239

Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.	Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.
621	385641	1241	656	430336	1311
622	386884	1243	657	431649	1313
623	388129	1245	658	432964	1315
624	389376	1247	659	434281	1317
625	390625	1249	660	435600	1319
626	391876	1251	661	436921	1321
627	393129	1253	662	438244	1323
628	394384	1255	663	439569	1325
629	395641	1257	664	440896	1327
630	396900	1259	665	442225	1329
631	398161	1261	666	443556	1331
632	399424	1263	667	444889	1333
633	400689	1265	668	446224	1335
634	401956	1267	669	447561	1337
635	403225	1269	670	448900	1339
636	404496	1271	671	450241	1341
637	405769	1273	672	451584	1343
638	407044	1275	673	452929	1345
639	408321	1277	674	454276	1347
640	409600	1279	675	455625	1349
641	410881	1281	676	456976	1351
642	412164	1283	677	458329	1353
643	413449	1285	678	459684	1355
644	414736	1287	679	461041	1357
645	416025	1289	680	462400	1359
646	417316	1291	681	463761	1361
647	418609	1293	682	465124	1363
648	419904	1295	683	466489	1365
649	421201	1297	684	467856	1367
650	422500	1299	685	469225	1369
651	423801	1301	686	470596	1371
652	425104	1303	687	471969	1373
653	426409	1305	688	473344	1375
654	427716	1307	689	474721	1377
655	429025	1309	690	476100	1379

Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.	Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.
691	477481	1381	726	527076	1451
692	478864	1383	727	528529	1453
693	480249	1385	728	529984	1455
694	481636	1387	729	531441	1457
695	483025	1389	730	532900	1459
696	484416	1391	731	534361	1461
697	485809	1393	732	535824	1463
698	487204	1395	733	537289	1465
699	488601	1397	734	538756	1467
700	490000	1399	735	540225	1469
701	491401	1401	736	541696	1471
702	492804	1403	737	543169	1473
703	494209	1405	738	544644	1475
704	495616	1407	739	546121	1477
705	497025	1409	740	547600	1479
706	498436	1411	741	549081	1481
707	499849	1413	742	550564	1483
708	501264	1415	743	552049	1485
709	502681	1417	744	553536	1487
710	504100	1419	745	555025	1489
711	505521	1421	746	556516	1491
712	506944	1423	747	558009	1493
713	508369	1425	748	559504	1495
714	509796	1427	749	561001	1497
715	511225	1429	750	562500	1499
716	512656	1431	751	564001	1501
717	514089	1433	752	565504	1503
718	515524	1435	753	567009	1505
719	516961	1437	754	568516	1507
720	518400	1439	755	570025	1509
721	519841	1441	756	571536	1511
722	521284	1443	757	573049	1513
723	522729	1445	758	574564	1515
724	524176	1447	759	576081	1517
725	525625	1449	760	577600	1519

Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.	Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.
761	579121	1521	796	633616	1591
762	580644	1523	797	635209	1593
763	582169	1525	798	636804	1595
764	583696	1527	799	638401	1597
765	585225	1529	800	640000	1599
766	586756	1531	801	641601	1601
767	588289	1533	802	643204	1603
768	589824	1535	803	644809	1605
769	591361	1537	804	646416	1607
770	592900	1539	805	648025	1609
771	594441	1541	806	649636	1611
772	595984	1543	807	651249	1613
773	597529	1545	808	652864	1615
774	599076	1547	809	654481	1617
775	600625	1549	810	656100	1619
776	602176	1551	811	657721	1621
777	603729	1553	812	659344	1623
778	605284	1555	813	660969	1625
779	606841	1557	814	662596	1627
780	608400	1559	815	664225	1629
781	609961	1561	816	665856	1631
782	611524	1563	817	667489	1633
783	613089	1565	818	669124	1635
784	614656	1567	819	670761	1637
785	616225	1569	820	672400	1639
786	617796	1571	821	674041	1641
787	619369	1573	822	675684	1643
788	620944	1575	823	677329	1645
789	622521	1577	824	678976	1647
790	624100	1579	825	680625	1649
791	625681	1581	826	682276	1651
792	627264	1583	827	683929	1653
793	628849	1585	828	685584	1655
794	630436	1587	829	687241	1657
795	632025	1589	830	688900	1659

Racines.	Quarrés.	Progres. générat.	Racines.	Quarrés.	Progres. générat.
831	690561	1661	866	749956	1731
832	692224	1663	867	751689	1733
833	693889	1665	868	753424	1735
834	695556	1667	869	755161	1737
835	697225	1669	870	756900	1739
836	698896	1671	871	758641	1741
837	700569	1673	872	760384	1743
838	702244	1675	873	762129	1745
839	703921	1677	874	763876	1747
840	705600	1679	875	765625	1749
841	707281	1681	876	767376	1751
842	708964	1683	877	769129	1753
843	710649	1685	878	770884	1755
844	712336	1687	879	772641	1757
845	714025	1689	880	774400	1759
846	715716	1691	881	776161	1761
847	717409	1693	882	777924	1763
848	719104	1695	883	779689	1765
849	720801	1697	884	781456	1767
850	722500	1699	885	783225	1769
851	724201	1701	886	784996	1771
852	725904	1703	887	786769	1773
853	727609	1705	888	788544	1775
854	729316	1707	889	790321	1777
855	731025	1709	890	792100	1779
856	732736	1711	891	793881	1781
857	734449	1713	892	795664	1783
858	736164	1715	893	797449	1785
859	737881	1717	894	799236	1787
860	739600	1719	895	801025	1789
861	741321	1721	896	802816	1791
862	743044	1723	897	804609	1793
863	744769	1725	898	806404	1795
864	746496	1727	899	808201	1797
865	748225	1729	900	810000	1799

Racines.	Quarrés.	Progres. générat.	Racines.	Quarrés.	Progres. générat.
901	811801	1801	936	876096	1871
902	813604	1803	937	877969	1873
903	815409	1805	938	879844	1875
904	817216	1807	939	881721	1877
905	819025	1809	940	883600	1879
906	820836	1811	941	885481	1881
907	822649	1813	942	887364	1883
908	824464	1815	943	889249	1885
909	826281	1817	944	891136	1887
910	828100	1819	945	893025	1889
911	829921	1821	946	894916	1891
912	831744	1823	947	896809	1893
913	833569	1825	948	898704	1895
914	835396	1827	949	900601	1897
915	837225	1829	950	902500	1899
916	839056	1831	951	904401	1901
917	840889	1833	952	906304	1903
918	842724	1835	953	908209	1905
919	844561	1837	954	910116	1907
920	846400	1839	955	912025	1909
921	848241	1841	956	913936	1911
922	850084	1843	957	915849	1913
923	851929	1845	958	917764	1915
924	853776	1847	959	919681	1917
925	855625	1849	960	921600	1919
926	857476	1851	961	923521	1921
927	859329	1853	962	925444	1923
928	861184	1855	963	927369	1925
929	863041	1857	964	929296	1927
930	864900	1859	965	931225	1929
931	866761	1861	966	933156	1931
932	868624	1863	967	935089	1933
933	870489	1865	968	937024	1935
934	872356	1867	969	938961	1937
935	874225	1869	970	940900	1939

Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.	Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.
971	942841	1941	1006	1012036	2011
972	944784	1943	1007	1014049	2013
973	946729	1945	1008	1016064	2015
974	948676	1947	1009	1018081	2017
975	950625	1949	1010	1020100	2019
976	952576	1951	1011	1022121	2021
977	954529	1953	1012	1024144	2023
978	956484	1955	1013	1026169	2025
979	958441	1957	1014	1028196	2027
980	960400	1959	1015	1030225	2029
981	962361	1961	1016	1032256	2031
982	964324	1963	1017	1034289	2033
983	966289	1965	1018	1036324	2035
984	968256	1967	1019	1038361	2037
985	970225	1969	1020	1040400	2039
986	972196	1971	1021	1042441	2041
987	974169	1973	1022	1044484	2043
988	976144	1975	1023	1046529	2045
989	978121	1977	1024	1048576	2047
990	980100	1979	1025	1050625	2049
991	982081	1981	1026	1052676	2051
992	984064	1983	1027	1054729	2053
993	986049	1985	1028	1056784	2055
994	988036	1987	1029	1058841	2057
995	990025	1989	1030	1060900	2059
996	992016	1991	1031	1062961	2061
997	994009	1993	1032	1065024	2063
998	996004	1995	1033	1067089	2065
999	998001	1997	1034	1069156	2067
1000	1000000	1999	1035	1071225	2069
1001	1002001	2001	1036	1073296	2071
1002	1004004	2003	1037	1075369	2073
1003	1006009	2005	1038	1077444	2075
1004	1008016	2007	1039	1079521	2077
1005	1010025	2009	1040	1081600	2079

Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.	Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.
1041	1083681	2081	1076	1157776	2151
1042	1085764	2083	1077	1159929	2153
1043	1087849	2085	1078	1162084	2155
1044	1089936	2087	1079	1164241	2157
1045	1092025	2089	1080	1166400	2159
1046	1094116	2091	1081	1168561	2161
1047	1096209	2093	1082	1170724	2163
1048	1098304	2095	1083	1172889	2165
1049	1100401	2097	1084	1175056	2167
1050	1102500	2099	1085	1177225	2169
1051	1104601	2101	1086	1179396	2171
1052	1106704	2103	1087	1181569	2173
1053	1108809	2105	1088	1183744	2175
1054	1110916	2107	1089	1185921	2177
1055	1113025	2109	1090	1188100	2179
1056	1115136	2111	1091	1190281	2181
1057	1117249	2113	1092	1192464	2183
1058	1119364	2115	1093	1194649	2185
1059	1121481	2117	1094	1196836	2187
1060	1123600	2119	1095	1199025	2189
1061	1125721	2121	1096	1201216	2191
1062	1127844	2123	1097	1203409	2193
1063	1129969	2125	1098	1205604	2195
1064	1132096	2127	1099	1207801	2197
1065	1134225	2129	1100	1210000	2199
1066	1136356	2131	1101	1212201	2201
1067	1138489	2133	1102	1214404	2203
1068	1140624	2135	1103	1216609	2205
1069	1142761	2137	1104	1218816	2207
1070	1144900	2139	1105	1221025	2209
1071	1147041	2141	1106	1223236	2211
1072	1149184	2143	1107	1225449	2213
1073	1151329	2145	1108	1227664	2215
1074	1153476	2147	1109	1229881	2217
1075	1155625	2149	1110	1232100	2219

Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.	Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.
1111	1234321	2221	1146	1313316	2291
1112	1236544	2223	1147	1315609	2293
1113	1238769	2225	1148	1317904	2295
1114	1240996	2227	1149	1320201	2297
1115	1243225	2229	1150	1322500	2299
1116	1245456	2231	1151	1324801	2301
1117	1247689	2233	1152	1327104	2303
1118	1249924	2235	1153	1329409	2305
1119	1252161	2237	1154	1331716	2307
1120	1254400	2239	1155	1334025	2309
1121	1256641	2241	1156	1336336	2311
1122	1258884	2243	1157	1338649	2313
1123	1261129	2245	1158	1340964	2315
1124	1263376	2247	1159	1343281	2317
1125	1265625	2249	1160	1345600	2319
1126	1267876	2251	1161	1347921	2321
1127	1270129	2253	1162	1350244	2323
1128	1272384	2255	1163	1352569	2325
1129	1274641	2257	1164	1354896	2327
1130	1276900	2259	1165	1357225	2329
1131	1279161	2261	1166	1359556	2331
1132	1281424	2263	1167	1361889	2333
1133	1283689	2265	1168	1364224	2335
1134	1285956	2267	1169	1366561	2337
1135	1288225	2269	1170	1368900	2339
1136	1290496	2271	1171	1371241	2341
1137	1292769	2273	1172	1373584	2343
1138	1295044	2275	1173	1375929	2345
1139	1297321	2277	1174	1378276	2347
1140	1299600	2279	1175	1380625	2349
1141	1301881	2281	1176	1382976	2351
1142	1304164	2283	1177	1385329	2353
1143	1306449	2285	1178	1387684	2355
1144	1308736	2287	1179	1390041	2357
1145	1311025	2289	1180	1392400	2359

Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.	Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.
1181	1394761	2361	1216	1478656	2431
1182	1397124	2363	1217	1481089	2433
1183	1399489	2365	1218	1483524	2435
1184	1401856	2367	1219	1485961	2437
1185	1404225	2369	1220	1488400	2439
1186	1406596	2371	1221	1490841	2441
1187	1408969	2373	1222	1493284	2443
1188	1411344	2375	1223	1495729	2445
1189	1413721	2377	1224	1498176	2447
1190	1416100	2379	1225	1500625	2449
1191	1418481	2381	1226	1503076	2451
1192	1420864	2383	1227	1505529	2453
1193	1423249	2385	1228	1507984	2455
1194	1425636	2387	1229	1510441	2457
1195	1428025	2389	1230	1512900	2459
1196	1430416	2391	1231	1515361	2461
1197	1432809	2393	1232	1517824	2463
1198	1435204	2395	1233	1520289	2465
1199	1437601	2397	1234	1522756	2467
1200	1440000	2399	1235	1525225	2469
1201	1442401	2401	1236	1527696	2471
1202	1444804	2403	1237	1530169	2473
1203	1447209	2405	1238	1532644	2475
1204	1449616	2407	1239	1535121	2477
1205	1452025	2409	1240	1537600	2479
1206	1454436	2411	1241	1540081	2481
1207	1456849	2413	1242	1542564	2483
1208	1459264	2415	1243	1545049	2485
1209	1461681	2417	1244	1547536	2487
1210	1464100	2419	1245	1550025	2489
1211	1466521	2421	1246	1552516	2491
1212	1468944	2423	1247	1555009	2493
1213	1471369	2425	1248	1557504	2495
1214	1473796	2427	1249	1560001	2497
1215	1476225	2429	1250	1562500	2499

Racines.	Quarrés.	Progres. générat.	Racines.	Quarrés.	Progres. générat.
1251	1565001	2501	1286	1653796	2571
1252	1567504	2503	1287	1656369	2573
1253	1570009	2505	1288	1658944	2575
1254	1572516	2507	1289	1661521	2577
1255	1575025	2509	1290	1664100	2579
1256	1577536	2511	1291	1666681	2581
1257	1580049	2513	1292	1669264	2583
1258	1582564	2515	1293	1671849	2585
1259	1585081	2517	1294	1674436	2587
1260	1587600	2519	1295	1677025	2589
1261	1590121	2521	1296	1679616	2591
1262	1592644	2523	1297	1682209	2593
1263	1595169	2525	1298	1684804	2595
1264	1597696	2527	1299	1687401	2597
1265	1600225	2529	1300	1690000	2599
1266	1602756	2531	1301	1692601	2601
1267	1605289	2533	1302	1695204	2603
1268	1607824	2535	1303	1697809	2605
1269	1610361	2537	1304	1700416	2607
1270	1612900	2539	1305	1703025	2609
1271	1615441	2541	1306	1705636	2611
1272	1617984	2543	1307	1708249	2613
1273	1620529	2545	1308	1710864	2615
1274	1623076	2547	1309	1713481	2617
1275	1625625	2549	1310	1716100	2619
1276	1628176	2551	1311	1718721	2621
1277	1630729	2553	1312	1721344	2623
1278	1633284	2555	1313	1723969	2625
1279	1635841	2557	1314	1726596	2627
1280	1638400	2559	1315	1729225	2629
1281	1640961	2561	1316	1731856	2631
1282	1643524	2563	1317	1734489	2633
1283	1646089	2565	1318	1737124	2635
1284	1648656	2567	1319	1739761	2637
1285	1651225	2569	1320	1742400	2639

Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.	Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.
1321	1745041	2641	1356	1838736	2711
1322	1747684	2643	1357	1841449	2713
1323	1750329	2645	1358	1844164	2715
1324	1752976	2647	1359	1846881	2717
1325	1755625	2649	1360	1849600	2719
1326	1758276	2651	1361	1852321	2721
1327	1760929	2653	1362	1855044	2723
1328	1763584	2655	1363	1857769	2725
1329	1766241	2657	1364	1860496	2727
1330	1768900	2659	1365	1863225	2729
1331	1771561	2661	1366	1865956	2731
1332	1774224	2663	1367	1868689	2733
1333	1776889	2665	1368	1871424	2735
1334	1779556	2667	1369	1874161	2737
1335	1782225	2669	1370	1876900	2739
1336	1784896	2671	1371	1879641	2741
1337	1787569	2673	1372	1882384	2743
1338	1790244	2675	1373	1885129	2745
1339	1792921	2677	1374	1887876	2747
1340	1795600	2679	1375	1890625	2749
1341	1798281	2681	1376	1893376	2751
1342	1800964	2683	1377	1896129	2753
1343	1803649	2685	1378	1898884	2755
1344	1806336	2687	1379	1901641	2757
1345	1809025	2689	1380	1904400	2759
1346	1811716	2691	1381	1907161	2761
1347	1814409	2693	1382	1909924	2763
1348	1817104	2695	1383	1912689	2765
1349	1819801	2697	1384	1915456	2767
1350	1822500	2699	1385	1918225	2769
1351	1825201	2701	1386	1920996	2771
1352	1827904	2703	1387	1923769	2773
1353	1830609	2705	1388	1926544	2775
1354	1833316	2707	1389	1929321	2777
1355	1836025	2709	1390	1932100	2779

Racines.	Quarrés.	Progres génerat.	Racines.	Quarrés.	Progres génerat.
1391	1934881	2781	1426	2033476	2851
1392	1937664	2783	1427	2036329	2853
1393	1940449	2785	1428	2039184	2855
1394	1943236	2787	1429	2042041	2857
1395	1946025	2789	1430	2044900	2859
1396	1948816	2791	1431	2047761	2861
1397	1951609	2793	1432	2050624	2863
1398	1954404	2795	1433	2053489	2865
1399	1957201	2797	1434	2056356	2867
1400	1960000	2799	1435	2059225	2869
1401	1962801	2801	1436	2062096	2871
1402	1965604	2803	1437	2064969	2873
1403	1968409	2805	1438	2067844	2875
1404	1971216	2807	1439	2070721	2877
1405	1974025	2809	1440	2073600	2879
1406	1976836	2811	1441	2076481	2881
1407	1979649	2813	1442	2079364	2883
1408	1982464	2815	1443	2082249	2885
1409	1985281	2817	1444	2085136	2887
1410	1988100	2819	1445	2088025	2889
1411	1990921	2821	1446	2090916	2891
1412	1993744	2823	1447	2093809	2893
1413	1996569	2825	1448	2096704	2895
1414	1999396	2827	1449	2099601	2897
1415	2002225	2829	1450	2102500	2899
1416	2005056	2831	1451	2105401	2901
1417	2007889	2833	1452	2108304	2903
1418	2010724	2835	1453	2111209	2905
1419	2013561	2837	1454	2114116	2907
1420	2016400	2839	1455	2117025	2909
1421	2019241	2841	1456	2119936	2911
1422	2022084	2843	1457	2122849	2913
1423	2024929	2845	1458	2125764	2915
1424	2027776	2847	1459	2128681	2917
1425	2030625	2849	1460	2131600	2919

Racines.	Quarrés.	Progres. générat.	Racines.	Quarrés.	Progres. générat.
1461	2134521	2921	1496	2238016	2991
1462	2137444	2923	1497	2241009	2993
1463	2140369	2925	1498	2244004	2995
1464	2143296	2927	1499	2247001	2997
1465	2146225	2929	1500	2250000	2999
1466	2149156	2931	1501	2253001	3001
1467	2152089	2933	1502	2256004	3003
1468	2155024	2935	1503	2259009	3005
1469	2157961	2937	1504	2262016	3007
1470	2160900	2939	1505	2265025	3009
1471	2163841	2941	1506	2268036	3011
1472	2166784	2943	1507	2271049	3013
1473	2169729	2945	1508	2274064	3015
1474	2172676	2947	1509	2277081	3017
1475	2175625	2949	1510	2280100	3019
1476	2178576	2951	1511	2283121	3021
1477	2181529	2953	1512	2286144	3023
1478	2184484	2955	1513	2289169	3025
1479	2187441	2957	1514	2292196	3027
1480	2190400	2959	1515	2295225	3029
1481	2193361	2961	1516	2298256	3031
1482	2196324	2963	1517	2301289	3033
1483	2199289	2965	1518	2304324	3035
1484	2202256	2967	1519	2307361	3037
1485	2205225	2969	1520	2310400	3039
1486	2208196	2971	1521	2313441	3041
1487	2211169	2973	1522	2316484	3043
1488	2214144	2975	1523	2319529	3045
1489	2217121	2977	1524	2322576	3047
1490	2220100	2979	1525	2325625	3049
1491	2223081	2981	1526	2328676	3051
1492	2226064	2983	1527	2331729	3053
1493	2229049	2985	1528	2334784	3055
1494	2232036	2987	1529	2337841	3057
1495	2235025	2989	1530	2340900	3059

Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.	Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.
1531	2343961	3061	1566	2452356	3131
1532	2347024	3063	1567	2455489	3133
1533	2350089	3065	1568	2458624	3135
1534	2353156	3067	1569	2461761	3137
1535	2356225	3069	1570	2464900	3139
1536	2359296	3071	1571	2468041	3141
1537	2362369	3073	1572	2471184	3143
1538	2365444	3075	1573	2474329	3145
1539	2368521	3077	1574	2477476	3147
1540	2371600	3079	1575	2480625	3149
1541	2374681	3081	1576	2483776	3151
1542	2377764	3083	1577	2486929	3153
1543	2380849	3085	1578	2490084	3155
1544	2383936	3087	1579	2493241	3157
1545	2387025	3089	1580	2496400	3159
1546	2390116	3091	1581	2499561	3161
1547	2393209	3093	1582	2502724	3163
1548	2396304	3095	1583	2505889	3165
1549	2399401	3097	1584	2509056	3167
1550	2402500	3099	1585	2512225	3169
1551	2405601	3101	1586	2515396	3171
1552	2408704	3103	1587	2518569	3173
1553	2411809	3105	1588	2521744	3175
1554	2414916	3107	1589	2524921	3177
1555	2418025	3109	1590	2528100	3179
1556	2421136	3111	1591	2531281	3181
1557	2424249	3113	1592	2534464	3183
1558	2427364	3115	1593	2537649	3185
1559	2430481	3117	1594	2540836	3187
1560	2433600	3119	1595	2544025	3189
1561	2436721	3121	1596	2547216	3191
1562	2439844	3123	1597	2550409	3193
1563	2442969	3125	1598	2553604	3195
1564	2446096	3127	1599	2556801	3197
1565	2449225	3129	1600	2560000	3199

Racines.	Quarrés.	Progres. générat.	Racines.	Quarrés.	Progres. générat.
1601	2563201	3201	1636	2676496	3271
1602	2566404	3203	1637	2679769	3273
1603	2569609	3205	1638	2683044	3275
1604	2572816	3207	1639	2686321	3277
1605	2576025	3209	1640	2689600	3279
1606	2579236	3211	1641	2692881	3281
1607	2582449	3213	1642	2696164	3283
1608	2585664	3215	1643	2699449	3285
1609	2588881	3217	1644	2702736	3287
1610	2592100	3219	1645	2706025	3289
1611	2595321	3221	1646	2709316	3291
1612	2598544	3223	1647	2712609	3293
1613	2601769	3225	1648	2715904	3295
1614	2604996	3227	1649	2719201	3297
1615	2608225	3229	1650	2722500	3299
1616	2611456	3231	1651	2725801	3301
1617	2614689	3233	1652	2729104	3303
1618	2617924	3235	1653	2732409	3305
1619	2621161	3237	1654	2735716	3307
1620	2624400	3239	1655	2739025	3309
1621	2627641	3241	1656	2742336	3311
1622	2630884	3243	1657	2745649	3313
1623	2634129	3245	1658	2748964	3315
1624	2637376	3247	1659	2752281	3317
1625	2640625	3249	1660	2755600	3319
1626	2643876	3251	1661	2758921	3321
1627	2647129	3253	1662	2762244	3323
1628	2650384	3255	1663	2765569	3325
1629	2653641	3257	1664	2768896	3327
1630	2656900	3259	1665	2772225	3329
1631	2660161	3261	1666	2775556	3331
1632	2663424	3263	1667	2778889	3333
1633	2666689	3265	1668	2782224	3335
1634	2669956	3267	1669	2785561	3337
1635	2673225	3269	1670	2788900	3339

Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.	Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.
1671	2792241	3341	1706	2910436	3411
1672	2795584	3343	1707	2913849	3413
1673	2798929	3345	1708	2917264	3415
1674	2802276	3347	1709	2920681	3417
1675	2805625	3349	1710	2924100	3419
1676	2808976	3351	1711	2927521	3421
1677	2812329	3353	1712	2930944	3423
1678	2815684	3355	1713	2934369	3425
1679	2819041	3357	1714	2937796	3427
1680	2822400	3359	1715	2941225	3429
1681	2825761	3361	1716	2944656	3431
1682	2829124	3363	1717	2948089	3433
1683	2832489	3365	1718	2951524	3435
1684	2835856	3367	1719	2954961	3437
1685	2839225	3369	1720	2958400	3439
1686	2842596	3371	1721	2961841	3441
1687	2845969	3373	1722	2965284	3443
1688	2849344	3375	1723	2968729	3445
1689	2852721	3377	1724	2972176	3447
1690	2856100	3379	1725	2975625	3449
1691	2859481	3381	1726	2979076	3451
1692	2862864	3383	1727	2982529	3453
1693	2866249	3385	1728	2985984	3455
1694	2869636	3387	1729	2989441	3457
1695	2873025	3389	1730	2992900	3459
1696	2876416	3391	1731	2996361	3461
1697	2879809	3393	1732	2999824	3463
1698	2883204	3395	1733	3003289	3465
1699	2886601	3397	1734	3006756	3467
1700	2890000	3399	1735	3010225	3469
1701	2893401	3401	1736	3013696	3471
1702	2896804	3403	1737	3017169	3473
1703	2900209	3405	1738	3020644	3475
1704	2903616	3407	1739	3024121	3477
1705	2907025	3409	1740	3027600	3479

Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.	Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.
1741	3031081	3481	1776	3154176	3551
1742	3034564	3483	1777	3157729	3553
1743	3038049	3485	1778	3161284	3555
1744	3041536	3487	1779	3164841	3557
1745	3045025	3489	1780	3168400	3559
1746	3048516	3491	1781	3171961	3561
1747	3052009	3493	1782	3175524	3563
1748	3055504	3495	1783	3179089	3565
1749	3059001	3497	1784	3182656	3567
1750	3062500	3499	1785	3186225	3569
1751	3066001	3501	1786	3189796	3571
1752	3069504	3503	1787	3193369	3573
1753	3073009	3505	1788	3196944	3575
1754	3076516	3507	1789	3200521	3577
1755	3080025	3509	1790	3204100	3579
1756	3083536	3511	1791	3207681	3581
1757	3087049	3513	1792	3211264	3583
1758	3090564	3515	1793	3214849	3585
1759	3094081	3517	1794	3218436	3587
1760	3097600	3519	1795	3222025	3589
1761	3101121	3521	1796	3225616	3591
1762	3104644	3523	1797	3229209	3593
1763	3108169	3525	1798	3232804	3595
1764	3111696	3527	1799	3236401	3597
1765	3115225	3529	1800	3240000	3599
1766	3118756	3531	1801	3243601	3601
1767	3122289	3533	1802	3247204	3603
1768	3125824	3535	1803	3250809	3605
1769	3129361	3537	1804	3254416	3607
1770	3132900	3539	1805	3258025	3609
1771	3136441	3541	1806	3261636	3611
1772	3139984	3543	1807	3265249	3613
1773	3143529	3545	1808	3268864	3615
1774	3147076	3547	1809	3272481	3617
1775	3150625	3549	1810	3276100	3619

Racines.	Quarrés.	Progres. général.	Racines.	Quarrés.	Progres. général.
1811	3279721	3621	1846	3407716	3691
1812	3283344	3623	1847	3411409	3693
1813	3286969	3625	1848	3415104	3695
1814	3290596	3627	1849	3418801	3697
1815	3294225	3629	1850	3422500	3699
1816	3297856	3631	1851	3426201	3701
1817	3301489	3633	1852	3429904	3703
1818	3305124	3635	1853	3433609	3705
1819	3308761	3637	1854	3437316	3707
1820	3312400	3639	1855	3441025	3709
1821	3316041	3641	1856	3444736	3711
1822	3319684	3643	1857	3448449	3713
1823	3323329	3645	1858	3452164	3715
1824	3326976	3647	1859	3455881	3717
1825	3330625	3649	1860	3459600	3719
1826	3334276	3651	1861	3463321	3721
1827	3337929	3653	1862	3467044	3723
1828	3341584	3655	1863	3470769	3725
1829	3345241	3657	1864	3474496	3727
1830	3348900	3659	1865	3478225	3729
1831	3352561	3661	1866	3481956	3731
1832	3356224	3663	1867	3485689	3733
1833	3359889	3665	1868	3489424	3735
1834	3363556	3667	1869	3493161	3737
1835	3367225	3669	1870	3496900	3739
1836	3370896	3671	1871	3500641	3741
1837	3374569	3673	1872	3504384	3743
1838	3378244	3675	1873	3508129	3745
1839	3381921	3677	1874	3511876	3747
1840	3385600	3679	1875	3515625	3749
1841	3389281	3681	1876	3519376	3751
1842	3392964	3683	1877	3523129	3753
1843	3396649	3685	1878	3526884	3755
1844	3400336	3687	1879	3530641	3757
1845	3404025	3689	1880	3534400	3759

Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.	Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.
1881	3538161	3761	1916	3671056	3831
1882	3541924	3763	1917	3674889	3833
1883	3545689	3765	1918	3678724	3835
1884	3549456	3767	1919	3682561	3837
1885	3553225	3769	1920	3686400	3839
1886	3556996	3771	1921	3690241	3841
1887	3560769	3773	1922	3694084	3843
1888	3564544	3775	1923	3697929	3845
1889	3568321	3777	1924	3701776	3847
1890	3572100	3779	1925	3705625	3849
1891	3575881	3781	1926	3709476	3851
1892	3579664	3783	1927	3713329	3853
1893	3583449	3785	1928	3717184	3855
1894	3587236	3787	1929	3721041	3857
1895	3591025	3789	1930	3724900	3859
1896	3594816	3791	1931	3728761	3861
1897	3598609	3793	1932	3732624	3863
1898	3602404	3795	1933	3736489	3865
1899	3606201	3797	1934	3740356	3867
1900	3610000	3799	1935	3744225	3869
1901	3613801	3801	1936	3748096	3871
1902	3617604	3803	1937	3751969	3873
1903	3621409	3805	1938	3755844	3875
1904	3625216	3807	1939	3759721	3877
1905	3629025	3809	1940	3763600	3879
1906	3632836	3811	1941	3767481	3881
1907	3636649	3813	1942	3771364	3883
1908	3640464	3815	1943	3775249	3885
1909	3644281	3817	1944	3779136	3887
1910	3648100	3819	1945	3783025	3889
1911	3651921	3821	1946	3786916	3891
1912	3655744	3823	1947	3790809	3893
1913	3659569	3825	1948	3794704	3895
1914	3663396	3827	1949	3798601	3897
1915	3667225	3829	1950	3802500	3899

Racines.	Quartés.	Progres. génerat.	Racines.	Quarrés.	Progres génerat
1951	3806401	3901	1986	3944196	3971
1952	3810304	3903	1987	3948169	3973
1953	3814209	3905	1988	3952144	3975
1954	3818116	3907	1989	3956121	3977
1955	3822025	3909	1990	3960100	3979
1956	3825936	3911	1991	3964081	3981
1957	3829849	3913	1992	3968064	3983
1958	3833764	3915	1993	3972049	3985
1959	3837681	3917	1994	3976036	3987
1960	3841600	3919	1995	3980025	3989
1961	3845521	3921	1996	3984016	3991
1962	3849444	3923	1997	3988009	3993
1963	3853369	3925	1998	3992004	3995
1964	3857296	3927	1999	3996001	3997
1965	3861225	3929	2000	4000000	3999
1966	3865156	3931	2001	4004001	4001
1967	3869089	3933	2002	4008004	4003
1968	3873024	3935	2003	4012009	4005
1969	3876961	3937	2004	4016016	4007
1970	3880900	3939	2005	4020025	4009
1971	3884841	3941	2006	4024036	4011
1972	3888784	3943	2007	4028049	4013
1973	3892729	3945	2008	4032064	4015
1974	3896676	3947	2009	4036081	4017
1975	3900625	3949	2010	4040100	4019
1976	3904576	3951	2011	4044121	4021
1977	3908529	3953	2012	4048144	4023
1978	3912484	3955	2013	4052169	4025
1979	3916441	3957	2014	4056196	4027
1980	3920400	3959	2015	4060225	4029
1981	3924361	3961	2016	4064256	4031
1982	3928324	3963	2017	4068289	4033
1983	3932289	3965	2018	4072324	4035
1984	3936256	3967	2019	4076361	4037
1985	3940225	3969	2020	4080400	4039

Racines.	Quarrés.	Progres. générat.	Racines.	Quarrés.	Progres générat.
2021	4084441	4041	2056	4227136	4111
2022	4088484	4043	2057	4231249	4113
2023	4092529	4045	2058	4235364	4115
2024	4096576	4047	2059	4239481	4117
2025	4100625	4049	2060	4243600	4119
2026	4104676	4051	2061	4247721	4121
2027	4108729	4053	2062	4251844	4123
2028	4112784	4055	2063	4255969	4125
2029	4116841	4057	2064	4260096	4127
2030	4120900	4059	2065	4264225	4129
2031	4124961	4061	2066	4268356	4131
2032	4129024	4063	2067	4272489	4133
2033	4133089	4065	2068	4276624	4135
2034	4137156	4067	2069	4280761	4137
2035	4141225	4069	2070	4284900	4139
2036	4145296	4071	2071	4289041	4141
2037	4149369	4073	2072	4293184	4143
2038	4153444	4075	2073	4297329	4145
2039	4157521	4077	2074	4301476	4147
2040	4161600	4079	2075	4305625	4149
2041	4165681	4081	2076	4309776	4151
2042	4169764	4083	2077	4313929	4153
2043	4173849	4085	2078	4318084	4155
2044	4177936	4087	2079	4322241	4157
2045	4182025	4089	2080	4326400	4159
2046	4186116	4091	2081	4330561	4161
2047	4190209	4093	2082	4334724	4163
2048	4194304	4095	2083	4338889	4165
2049	4198401	4097	2084	4343056	4167
2050	4202500	4099	2085	4347225	4169
2051	4206601	4101	2086	4351396	4171
2052	4210704	4103	2087	4355569	4173
2053	4214809	4105	2088	4359744	4175
2054	4218916	4107	2089	4363921	4177
2055	4223025	4109	2090	4368100	4179

Racines.	Quarrés.	Progres. générat.	Racines.	Quarrés.	Progres. générat.
2091	4372281	4181	2096	4393216	4191
2092	4376464	4183	2097	4397409	4193
2093	4380649	4185	2098	4401604	4195
2094	4384836	4187	2099	4405801	4197
2095	4389025	4189	2100	4410000	4199

DEUXIÈME SECTION.

Au commencement de cet ouvrage, nous avons dit que la progression arithmétique croissante 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, etc., etc., dont la différence 2 est constante, doit être appelée *progression génératrice*, par la raison qu'elle sert à former tous les quarrés des nombres naturels, pris selon leur ordre numérique, et calculés jusqu'à l'infini; en additionnant successivement ses termes. Ainsi, les quarrés des dixaines, des centaines, des mille, etc., qui se trouvent compris dans la formation des quarrés ci-dessus expliqués, suivent par conséquent la même loi que celle des quarrés des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., etc., puisqu'ils résultent de l'addition successive des termes provenant d'autant de progressions génératrices qui ont les mêmes rapports et qui produisent les mêmes effets que la première, en observant que les termes de la progression génératrice qui servent à former les quarrés de la racine qui augmente de dixaine en dixaine different entre eux de 200; que ceux de la progression génératrice qui servent à former les quarrés de la racine qui augmente de centaine en centaine different entre eux de 20000; que ceux de la progression génératrice qui servent à former les quarrés de la racine qui augmente de mille en mille different

entre eux de 2000000; et qu'enfin les termes d'une progression génératrice quelconque ont toujours un nombre de zéros double de celui des zéros des racines correspondantes.

Effectivement, la différence de 100, quarré de 10, et de 400, quarré de 20, est 300; la différence de 400 et de 900, quarré de 30, est 500; la différence de 900 et de 1600, quarré de 40, est 700; la différence de 1600 et de 2500, quarré de 50, est 900; la différence de 2500 et de 3600, quarré de 60, est 1100; la différence de 3600 et de 4900, quarré de 70, est 1300; la différence de 4900 et de 6400, quarré de 80, est 1500; la différence de 6400 et de 8100, quarré de 90, est 1700; la différence de 8100 et de 10000, quarré de 100, est 1900. Nous prenons 100 pour premier terme de toutes ces différences, et nous avons la série 100, 300, 500, 700, 900, 1100, 1300, 1500, 1700, 1900, etc., dont la différence constante est 200, et qui a la propriété immuable de former, par l'addition successive de ses termes, tous les quarrés de la racine qui augmente de dixaine en dixaine.

La différence de 10000, quarré de 100, et de 40000, quarré de 200, est 30000; la différence de 40000 et de 90000, quarré de 300, est 50000; la différence de 90000 et de 160000, quarré de 400, est 70000; la différence de 160000 et de 250000, quarré de 500, est 90000; la différence de 250000 et de 360000, quarré de 600, est 110000; la différence de 360000 et de 490000, quarré de 700, est 130000; la différence de 490000 et de 640000, quarré de 800, est 150000; la différence de 640000 et de 810000, quarré de 900, est 170000; la différence de 810000 et de 1000000, quarré de 1000, est 190000. Nous prenons 10000 pour premier terme de toutes ces différences, et nous avons la série 10000, 30000, 50000, 70000, 90000, 110000, 130000, 150000, 170000, 190000, etc., dont la différence 20000 est constante, et qui a la propriété immuable de for-

met, par l'addition successive de ses termes, tous les quarrés de la racine qui augmente de centaine en centaine.

La différence de 1000000, quarré de 1000, et de 4000000, quarré de 2000, est 3000000; la différence de 4000000 et de 9000000, quarré de 3000, est 5000000; la différence de 9000000 et de 16000000, quarré de 4000, est 7000000; la différence de 16000000 et de 25000000, quarré de 5000, est 9000000; la différence de 25000000 et de 36000000, quarré de 6000, est 11000000; la différence de 36000000 et de 49000000, quarré de 7000, est 13000000; la différence de 49000000 et de 64000000, quarré de 8000, est 15000000; la différence de 64000000 et de 81000000, quarré de 9000, est 17000000; la différence de 81000000 et de 100000000, quarré de 10000, est 19000000. Nous prenons 1000000 pour premier terme de toutes ces différences, et nous avons la série 1000000, 3000000, 5000000, 7000000, 9000000, 11000000, 13000000, 15000000, 17000000, 19000000, etc., dont la différence 2000000 est constante, et qui a la propriété immuable de former, par l'addition successive de ses termes, tous les quarrés de la racine qui augmente de mille en mille.

Chacune de ces séries, et d'autres subséquentes analogues, est une progression arithmétique croissante parfaitement semblable à la première, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, etc., etc., parce qu'elles ont toutes les mêmes rapports entre leurs termes correspondans, et donnent les mêmes résultats.

En effet, il est évident que ces séries, dont les termes sont autant de progressions génératrices ascendantes, ont la propriété immuable de former tous les quarrés des dixaines de la racine qui s'approche de plus en plus de l'infini. Comme aussi il est évident que ces séries, prises en raison inverse, dont les termes sont autant de progressions génératrices descendantes, ont la propriété immuable de

former tous les quarrés des dixaines qui se rapprochent de plus en plus des quarrés des unités de la racine.

Dans cette section, nous traiterons des quarrés des dixaines de la racine qui s'éloignent de plus en plus des quarrés de ses unités, et ainsi s'approchent de l'infini.

Pour rendre plus méthodiques et plus intelligibles les principes que nous allons développer dans cette seconde section, nous la divisons en huit articles.

ARTICLE PREMIER.

Règle de transition des unités de la racine à ses dixaines.

Mais afin de nous éloigner des quarrés des unités de la racine, et par cela même de commencer à nous rapprocher de ceux des grands nombres, nous allons faire un tableau des quarrés des dixaines de la racine qui suivent immédiatement ceux des deux mille cent unités.

Les termes de la série qui serviront à former les quarrés de la racine qui augmente de dixaine en dixaine, et que nous appelons *progression génératrice*, sont 100, 300, 500, 700, 900, 1100, 1300, 1500, etc., etc., dont 200 est la différence constante. Ainsi, il nous faut obtenir le terme de cette série, qui nous fait passer des unités aux dixaines, et qui correspond à 2100, la racine, et à son quarré; ensuite, trouver par l'addition le quarré de 2110. Or, pour réussir dans cette double opération, il faut, 1°. chercher la différence des deux dernières dixaines de la racine qui précèdent celui de 2110, c'est-à-dire la différence de 4410000, quarré de 2100, et de 4368100, quarré de 2090, laquelle est 41900, ou, ce qui produit le même résultat, prendre 4199, le terme de la progression génératrice correspondant à 2109, la dernière racine, et égalant le double de cette même racine moins un, remplacer le dernier 9 de ce terme par deux zéros, pour avoir 41900, le terme de la série qui nous est nécessaire pour passer des unités aux dixaines; 2°. augmenter de deux cen-

taines le terme 41900, et ainsi le convertir en cet autre, 42100, qui correspond à la racine 2110; 3°, additionner 4410000, le dernier quarré, et 42100, le terme augmenté de deux centaines, pour avoir la somme 4452100, qui est vraiment le quarré de 2110.

Mais, afin de trouver les quarrés des dixaines suivantes de la racine, l'opération est plus simple. Il faut, à chaque dixaine dont on cherche le quarré, 1°. augmenter de deux centaines le dernier terme connu; 2°. additionner le dernier quarré trouvé et le terme augmenté de deux centaines. La somme sera toujours le quarré du nombre cherché. Par exemple, on demande le quarré de 2120. Pour l'avoir, il faut augmenter de deux centaines le dernier terme 42100, qui, par cette augmentation, est changé en cet autre, 42300; additionner 4452100, quarré de 2110, et 42300, terme augmenté de deux centaines. La somme 4494400 sera le quarré de 2120. On demande aussi le quarré de 2130, qu'on obtient en augmentant de deux centaines le dernier terme 42300, qui alors est changé en cet autre, 42500, et en additionnant 4494400, quarré de 2120, et 42500, terme augmenté de deux centaines, puisque 4536900, la somme qui résulte de cette addition, est le quarré de 2130.

Cette opération simple est facile à voir dans la première suite du tableau premier, où l'on aperçoit aussitôt que 41900, la différence des deux derniers quarrés des dixaines de la racine qui précèdent celui de 2110, est le premier terme de la progression génératrice que nous faisons correspondre à 2100, la racine, et à son quarré, afin de passer des unités de la racine à ses dixaines; que ce premier terme, augmenté à chaque addition de deux centaines, compose les termes suivans; que chaque terme trouvé correspondant à chaque racine, et le dernier quarré connu correspondant à celle qui la précède immédiatement, étant additionnés, forment le quarré suivant.

Mais, dira-t-on, chaque terme de la progression généra-

trice doit être exactement, moins une unité, le double de chaque racine correspondante; pourquoi chaque terme de la progression génératrice, lorsqu'il s'agit de trouver les quarrés des racines qui augmentent de dixaine en dixaine, est-il numériquement plus grand que le double, moins un, de chaque racine correspondante, puisque le terme 41900 dépasse beaucoup le double, moins un, la racine correspondante, et que le terme 42100 dépasse aussi beaucoup le double, moins un, de 2110, la racine correspondante?

Nous répondons que chaque terme de la progression génératrice est effectivement toujours le double, moins un, de chaque racine correspondante, lorsqu'on cherche les quarrés de la racine qui augmente d'unité en unité; mais dès que l'on cherche les quarrés de la racine qui augmente de dixaine en dixaine, de centaine en centaine, de mille en mille, etc., alors il devient nécessaire que chaque terme provienne de chacune des séries dont les termes diffèrent constamment entre eux de 200, ou de 20000, ou de 2000000, etc., pour opérer ces diverses transitions, et pour former, par l'addition, les quarrés de la racine qui croît de dixaine en dixaine, de centaine en centaine, de mille en mille, etc. Voilà la raison pourquoi nous supprimons autant de 9 du terme de la série primitive, lequel effectivement égale le double, moins un, de la racine correspondante, pour les remplacer par le double de zéros nécessaires, afin qu'il devienne le terme de chacune des séries qu'il faut pour la formation exacte de tous les différens quarrés que nous cherchons.

PREMIÈRE SUITE DU TABLEAU PREMIER.

Formation des quarrés des dixaines de la racine qui suivent immédiatement les quarrés des 2100 *unités.*

Dans la première suite du tableau premier, au lieu de placer tous les zéros absolument nécessaires pour la formation de chaque quarré des dixaines de la racine et pour la composition de chaque terme de la série, nous observons que, pour faciliter uniquement l'impression, nous supprimons dans l'un et l'autre deux zéros, que nous indiquons en faire partie, à cause de l'exactitude du calcul.

Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.	Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.
2100	44100	419	2300	52900	459
2110	44521	421	2310	53361	461
2120	44944	423	2320	53824	463
2130	45369	425	2330	54289	465
2140	45796	427	2340	54756	467
2150	46225	429	2350	55225	469
2160	46656	431	2360	55696	471
2170	47089	433	2370	56169	473
2180	47524	435	2380	56644	475
2190	47961	437	2390	57121	477
2200	48400	439	2400	57600	479
2210	48841	441	2410	58081	481
2220	49284	443	2420	58564	483
2230	49729	445	2430	59049	485
2240	50176	447	2440	59536	487
2250	50625	449	2450	60025	489
2260	51076	451	2460	60516	491
2270	51529	453	2470	61009	493
2280	51984	455	2480	61504	495
2290	52441	457	2490	62001	497

Racines.	Quarrés.	Progrès. générat.	Racines.	Quarrés.	Progrès. générat.
2500	625oo	499	2660	70756	531
2510	63001	501	2670	71289	533
2520	63504	503	2680	71824	535
2530	64009	505	2690	72361	537
2540	64516	507	2700	72900	539
2550	65025	509	2710	73441	541
2560	65536	511	2720	73984	543
2570	66049	513	2730	74529	545
2580	66564	515	2740	75076	587
2590	67081	517	2750	75625	549
2600	67600	519	2760	76176	551
2610	68121	521	2770	76729	553
2620	68644	523	2780	77284	555
2630	69169	525	2790	77841	557
2640	69696	527	2800	78400	559
2650	70225	529			

ARTICLE II.

Règle de transition des dixaines de la racine à ses centaines.

Comme nous voulons continuer à chercher les quarrés des dixaines ascendantes de la racine, et ainsi à nous rapprocher de plus en plus de ceux des grands nombres, nous allons passer des dixaines de la racine à ses centaines, et faire un tableau des quarrés des centaines de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 2800, où nous nous sommes arrêté.

Les termes de la série qui servent à former les quarrés de la racine qui augmente de centaine en centaine, et que nous appelons *progression génératrice*, sont 10000, 30000, 50000, 70000, 90000, 110000, 130000, 150000, etc., etc., dont

20000 est la différence constante. Ainsi, il nous faut obtenir le terme de cette série, qui nous fait passer des dixaines aux centaines, et qui correspond à 2800, la racine; ensuite, trouver par l'addition le quarré de 2900. Or, pour faire cette double opération, il faut, 1°. chercher la différence des quarrés des deux dernières centaines de la racine qui précèdent celui de 2900, c'est-à-dire la différence de 7840000, quarré de 2800, et de 7290000, quarré de 2700, qui est 550000, ou, ce qui produit le même résultat, remplacer par deux zéros le 9, lesquels ajoutés aux deux zéros que nous avons supprimés pour la facilité de l'impression, et que nous avons indiqués en faire partie, afin de rendre le calcul exact, de 559, dernier terme de la série qui nous a servi à trouver les quarrés de la racine qui augmente de dixaine en dixaine, pour avoir 550000, le même terme qui nous est nécessaire pour passer des dixaines de la racine aux centaines, et qui correspond à la racine 2800; et à son quarré 7840000; 2°. augmenter de 20000 le terme 550000, et ainsi le changer en cet autre, 570000, qui correspond à la racine 2900; 3°. additionner 7840000, quarré de 2800, et 570000, le dernier terme augmenté de 20000, pour avoir la somme de 8410000, qui est vraiment le quarré de 2900.

Mais, afin de trouver les quarrés des centaines suivantes, l'opération est plus simple. Il faut, à chaque centaine dont on cherche le quarré, 1°. augmenter de 20000 le dernier terme connu; 2°. additionner le dernier quarré trouvé et le terme augmenté de 20000. La somme sera toujours le quarré du nombre cherché. Par exemple, on demande le quarré de 3000. Pour l'avoir, il faut augmenter de 20000 le dernier terme 570000, qui est changé en cet autre, 590000; additionner 8410000, quarré de 2900, et 590000, terme augmenté de 20000. La somme sera 9000000, quarré de 3000. Cette opération simple est facile à voir dans la deuxième suite du tableau premier, où l'on aperçoit aussitôt que 550000 est le premier terme de la série qui correspond à la racine 2800 et

à son quarré ; que ce premier terme, augmenté à chaque addition de 20000, compose les termes suivans.

DEUXIÈME SUITE DU TABLEAU PREMIER.

Formation des quarrés des centaines de la racine qui suivent immédiatement les quarrés du nombre 2800.

Dans la deuxième suite du tableau premier, nous observons que, pour faciliter l'impression, nous supprimons dans chaque quarré et dans chaque terme de la série quatre zéros qui sont absolument nécessaires, afin de rendre le calcul exact.

Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.	Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.
2800	784	55	4800	2304	95
2900	841	57	4900	2401	97
3000	900	59	5000	2500	99
3100	961	61	5100	2601	101
3200	1024	63	5200	2704	103
3300	1089	65	5300	2809	105
3400	1156	67	5400	2916	107
3500	1225	69	5500	3025	109
3600	1296	71	5600	3136	111
3700	1369	73	5700	3249	113
3800	1444	75	5800	3364	115
3900	1521	77	5900	3481	117
4000	1600	79	6000	3600	119
4100	1681	81	6100	3721	121
4200	1764	83	6200	3844	123
4300	1849	85	6300	3969	125
4400	1936	87	6400	4096	127
4500	2025	89	6500	4225	129
4600	2116	91	6600	4356	131
4700	2209	93	6700	4489	133

Racines.	Quarrés.	Progres. générat.	Racines.	Quarrés.	Progres. générat.
6800	4624	135	7500	5625	149
6900	4761	137	7600	5776	151
7000	4900	139	7700	5929	153
7100	5041	141	7800	6084	155
7200	5184	143	7900	6241	157
7300	5329	145	8000	6400	159
7400	5476	147			

ARTICLE III.

Règle de transition des centaines de la racine à ses mille.

Comme nous voulons continuer à obtenir les quarrés des dixaines ascendantes de la racine, nous allons passer des centaines de la racine à ses mille, et faire un tableau des quarrés des mille de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 8000, où nous nous sommes arrêté.

Les termes de la série qui servent à former les quarrés de la racine qui augmente de mille en mille, et que nous appelons *progression génératrice*, sont 1000000, 3000000, 5000000, 7000000, 9000000, 11000000, 13000000, 15000000, etc., etc., dont 2000000 est la différence constante. Ainsi, il nous faut obtenir le terme de cette série, qui nous fait passer des centaines aux mille, et qui correspond à 8000, la racine, et à son quarré; ensuite, trouver par l'addition le quarré de 9000. Or, pour faire cette double opération, il faut, 1°. chercher la différence des quarrés des deux derniers mille de la racine qui précèdent celui de 9000, c'est-à-dire la différence de 64000000, quarré de 8000, et de 49000000, quarré de 7000, qui est 15000000, ou, ce qui produit le même résultat, remplacer par deux zéros le 9 qui en précède quatre autres de 1590000, dernier terme de

la série qui nous a servi à trouver les quarrés de la racine qui augmente de centaine en centaine, pour avoir 15000000, le même terme qui nous est nécessaire pour passer des centaines de la racine aux mille, et qui correspond à la racine 8000 et à son quarré ; 2°. augmenter de 2000000 le terme 15000000, et ainsi le changer en cet autre, 17000000, qui correspond à la racine 9000 ; 3°. additionner 64000000, le quarré de 8000, et 17000000, le dernier terme augmenté de 2000000, pour avoir la somme 81000000, qui est vraiment le quarré de 9000.

Mais, afin de trouver les quarrés suivans des mille de la racine, l'opération est plus simple. Il faut, à chaque mille qu'on ajoute, et dont on cherche ensuite le quarré, 1°. augmenter de 2000000 le dernier terme connu ; 2°. additionner le dernier quarré trouvé et le terme augmenté de 2000000. La somme sera toujours le quarré du nombre cherché. Par exemple, on demande le quarré de 10000. On l'obtient aisément en augmentant de 2000000, 17000000 le dernier terme de la série, qui est changé en cet autre, 19000000 ; en additionnant 81000000, quarré de 9000, et 19000000, terme augmenté de 2000000. La somme 100000000 sera le quarré de 10000. Cette opération simple est facile à voir dans la troisième suite du tableau premier, où l'on aperçoit aussitôt que 15000000 est le premier terme qui correspond à 8000, la racine, et à son quarré ; que ce premier terme, augmenté à chaque addition de 2000000, compose les termes suivans.

TROISIÈME SUITE DU TABLEAU PREMIER.

Formation des quarrés des mille de la racine qui suivent immédiatement les quarrés du nombre 8000.

Dans la troisième suite du tableau premier, nous supprimons, pour faciliter l'impression, dans chaque quarré et dans chaque terme de la série, six zéros qui sont absolument nécessaires, afin de rendre le calcul exact.

Racines.	Quarrés.	Progres. générat.	Racines.	Quarrés.	Progres. générat.
8000	64	15	33000	1089	65
9000	81	17	34000	1156	67
10000	100	19	35000	1225	69
11000	121	21	36000	1296	71
12000	144	23	37000	1369	73
13000	169	25	38000	1444	75
14000	196	27	39000	1521	77
15000	225	29	40000	1600	79
16000	256	31	41000	1681	81
17000	289	33	42000	1764	83
18000	324	35	43000	1849	85
19000	361	37	44000	1936	87
20000	400	39	45000	2025	89
21000	441	41	46000	2116	91
22000	484	43	47000	2209	93
23000	529	45	48000	2304	95
24000	576	47	49000	2401	97
25000	625	49	50000	2500	99
26000	676	51	51000	2601	101
27000	729	53	52000	2704	103
28000	784	55	53000	2809	105
29000	841	57	54000	2916	107
30000	900	59	55000	3025	109
31000	961	61	56000	3136	111
32000	1024	63	57000	3249	113

Racines.	Quarrés.	Progrès. générat.	Quarrés.	Quarrés.	Progrès. générat.
58000	3364	115	65000	4225	129
59000	3481	117	66000	4356	131
60000	3600	119	67000	4489	133
61000	3721	121	68000	4624	135
62000	3844	123	69000	4761	137
63000	3969	125	70000	4900	139
64000	4096	127			

ARTICLE IV.

Règle de transition des mille de la racine à ses dix mill

Des mille de la racine nous passons à ses dix mille. Comm nous voulons continuer notre opération, nous allons faire u tableau des quarrés des dix mille de la racine qui suive immédiatement ceux du nombre 70000, où nous nous somm arrêté.

Les termes de la série qui servent à former les quarrés la racine qui augmente de dix mille en dix mille, et q nous appelons *progression génératrice*, sont 10000000 300000000, 500000000, 700000000, 900000000, 1100000000 1300000000, 1500000000, etc., etc., dont 200000000 est différence constante. Ainsi, il nous faut obtenir le terme cette série, qui nous fait passer des mille aux dix mille, et q correspond à 70000, la racine, et à 4900000000, son quarr et celui de la même série, lequel additionné avec ce dern quarré, forme celui de 80000. Or, pour faire cette dou opération, il faut, 1°. remplacer par deux zéros le 9 qui précède six autres de 139000000, dernier terme de la sé qui a servi à trouver les quarrés de la racine qui augme de mille en mille, pour avoir 1300000000, le terme nous est nécessaire pour passer des mille de la racine à

dix mille, et qui correspond à la racine 70000 et à son quarré ; 2°. augmenter de 200000000 le terme 1300000000, pour avoir 1500000000, autre terme de la même série, qui correspond à 80000, la racine; 3°. additionner 4900000000, le quarré de 70000, et 1500000000, le dernier terme augmenté de 200000000, pour avoir la somme 6400000000, le quarré de 80000.

Mais, afin de trouver les quarrés des dix mille suivans de la racine, l'opération est plus simple. Il faut, à chaque dix mille qu'on ajoute, et dont on cherche le quarré, 1°. augmenter de 200000000 le dernier terme connu ; 2°. additionner le dernier quarré trouvé et le terme augmenté de 200000000. La somme sera toujours le quarré du nombre cherché. Par exemple, on demande le quarré de 90000. On l'obtient aisément en augmentant de 200000000, 1500000000, le dernier terme de la série, qui est changé en cet autre, 1700000000 ; en additionnant 6400000000, quarré de 80000, et 1700000000, terme augmenté de 200000000. La somme 8100000000 sera le quarré de 90000. Cette opération simple est facile à voir dans la quatrième suite du tableau premier, où l'on aperçoit aussitôt que 1300000000 est le premier terme qui correspond à 70000, la racine, et à son quarré ; que ce premier terme, augmenté à chaque addition de 200000000, compose les termes suivans.

QUATRIÈME SUITE DU TABLEAU PREMIER.

Formation des quarrés des dix mille de la racine qui suivent immédiatement les quarrés du nombre 70000.

Dans la quatrième suite du tableau premier, nous supprimons pour faciliter l'impression, dans chaque quarré et dans chaque terme de la série, huit zéros qui sont absolument nécessaires, afin de rendre le calcul exact.

Racines.	Quarrés.	Progres. générat.	Racines.	Quarrés.	Progres. générat.
70000	49	13	320000	1024	63
80000	64	15	330000	1089	65
90000	81	17	340000	1156	67
100000	100	19	350000	1225	69
110000	121	21	360000	1296	71
120000	144	23	370000	1369	73
130000	169	25	380000	1444	75
140000	196	27	390000	1521	77
150000	225	29	400000	1600	79
160000	256	31	410000	1681	81
170000	289	33	420000	1764	83
180000	324	35	430000	1849	85
190000	361	37	440000	1936	87
200000	400	39	450000	2025	89
210000	441	41	460000	2116	91
220000	484	43	470000	2209	93
230000	529	45	480000	2304	95
240000	576	47	490000	2401	97
250000	625	49	500000	2500	99
260000	676	51	510000	2601	101
270000	729	53	520000	2704	103
280000	784	55	530000	2809	105
290000	841	57	540000	2916	107
300000	900	59	550000	3025	109
310000	961	61	560000	3136	111

Racines.	Quarrés.	Progres. générat.	Racines.	Quarrés.	Progres. générat.
570000	3249	113	840000	7056	167
580000	3364	115	850000	7225	169
590000	3481	117	860000	7396	171
600000	3600	119	870000	7569	173
610000	3721	121	880000	7744	175
620000	3844	123	890000	7921	177
630000	3969	125	900000	8100	179
640000	4096	127	910000	8281	181
650000	4225	129	920000	8464	183
660000	4356	131	930000	8649	185
670000	4489	133	940000	8836	187
680000	4624	135	950000	9025	189
690000	4761	137	960000	9216	191
700000	4900	139	970000	9409	193
710000	5041	141	980000	9604	195
720000	5184	143	990000	9801	197
730000	5329	145	1000000	10000	199
740000	5476	147	1010000	10201	201
750000	5625	149	1020000	10404	203
760000	5776	151	1030000	10609	205
770000	5929	153	1040000	10816	207
780000	6084	155	1050000	11025	209
790000	6241	157	1060000	11236	211
800000	6400	159	1070000	11449	213
810000	6561	161	1080000	11664	215
820000	6724	163	1090000	11881	217
830000	6889	165	1100000.	12100	219

ARTICLE V.

Règle de transition des dix mille de la racine à ses cent mille.

Comme nous voulons passer des dix mille de la racine à ses cent mille, nous allons faire un tableau des quarrés

des cent mille de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 1100000, où nous nous sommes arrêté.

Les termes de la série qui servent à former les quarrés de la racine qui augmente de cent mille en cent mille, et que nous appelons *progression génératrice*, sont 10000000000, 30000000000, 50000000000, 70000000000, 90000000000, 110000000000, 130000000000, 150000000000, etc., etc., dont 200000000000 est la différence constante. Ainsi, il nous faut obtenir le terme de cette série, qui nous fait passer des dix mille aux cent mille, et qui correspond à 1100000, la racine, et à 1210000000000, son quarré, et celui de la même série qui nous fait trouver par l'addition le quarré de 1200000. Or, pour faire cette double opération, 1°. il faut remplacer par deux zéros le 9 qui en précède huit autres de 2190000000, dernier terme de la série qui nous a servi à trouver les quarrés de la racine qui augmente de dix mille en dix mille, pour avoir 210000000000, le terme qui nous est nécessaire pour passer des dix mille de la racine aux cent mille, et qui correspond à la racine 1100000 et à son quarré; 2°. augmenter de 20000000000 le terme 210000000000, pour avoir 230000000000, autre terme de la même série, qui correspond à 1200000, la racine, et à son quarré; 3°. additionner 1210000000000, le quarré de 1100000, et 230000000000, le dernier terme augmenté de 20000000000, pour avoir la somme 1440000000000, qui est vraiment le quarré de 1200000.

Mais, afin de trouver les quarrés des cent mille suivans de la racine, l'opération est plus simple. Il faut, à chaque cent mille qu'on ajoute, et dont on cherche le quarré, 1°. augmenter de 20000000000 le dernier terme connu; 2°. additionner le dernier quarré trouvé et le terme augmenté de 20000000000. La somme sera toujours le quarré du nombre cherché. Par exemple, on demande le quarré de 1300000. On l'obtient aisément en augmentant de 200000000000, 230000000000, le dernier terme de la série, qui est changé

en cet autre, 250000000000; en additionnant 144000000000, quarré de 1200000, et 250000000000, terme augmenté de 200000000000. La somme 1690000000000 sera le quarré de 1300000. Cette opération simple est facile à voir dans la cinquième suite du tableau premier, où l'on aperçoit aussitôt que 210000000000 est le premier terme qui correspond à 1100000, la racine, et à son quarré; que ce premier terme, augmenté à chaque addition de 200000000000, compose les termes suivans.

CINQUIÈME SUITE DU TABLEAU PREMIER.

Formation des quarrés des cent mille de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 1100000.

Dans la cinquième suite du tableau premier, nous supprimons, pour faciliter l'impression, dans chaque quarré et dans chaque terme de la série, dix zéros qui sont absolument nécessaires, afin de rendre le calcul exact.

Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.	Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.
1100000	121	21	2600000	676	51
1200000	144	23	2700000	729	53
1300000	169	25	2800000	784	55
1400000	196	27	2900000	841	57
1500000	225	29	3000000	900	59
1600000	256	31	3100000	961	61
1700000	289	33	3200000	1024	63
1800000	324	35	3300000	1089	65
1900000	361	37	3400000	1156	67
2000000	400	39	3500000	1225	69
2100000	441	41	3600000	1296	71
2200000	484	43	3700000	1369	73
2300000	529	45	3800000	1444	75
2400000	576	47	3900000	1521	77
2500000	625	49	4000000	1600	79

Racines.	Quarrés.	Progres. générat.	Racines.	Quarrés.	Progres générat
4100000	1681	81	5600000	3136	111
4200000	1764	83	5700000	3249	113
4300000	1849	85	5800000	3364	115
4400000	1936	87	5900000	3481	117
4500000	2025	89	6000000	3600	119
4600000	2116	91	6100000	3721	121
4700000	2209	93	6200000	3844	123
4800000	2304	95	6300000	3969	125
4900000	2401	97	6400000	4096	127
5000000	2500	99	6500000	4226	129
5100000	2601	101	6600000	4356	131
5200000	2704	103	6700000	4489	133
5300000	2809	105	6800000	4624	135
5400000	2916	107	6900000	4761	137
5500000	3025	109	7000000	4900	139

ARTICLE VI.

Règle de transition des cent mille de la racine à ses millions.

Des cent mille de la racine nous passons aux millions. Comme nous voulons continuer notre opération, nous allons faire un tableau des quarrés des millions de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 7000000.

Les termes de la série qui servent à former les quarrés de la racine qui augmente de million en million, et que nous appelons, comme les précédentes, *progression génératrice*, sont 1000000000000, 3000000000000, 5000000000000, 7000000000000, 9000000000000, 11000000000000, ... 13000000000000, 15000000000000, etc., etc...., dont 2000000000000 est la différence constante. Ainsi, il nous faut obtenir le terme de cette série, qui nous fait passer

des cent mille aux millions, et qui correspond à 7000000, la racine, et à 49000000000000, son quarré, et celui de la même série, qui nous fait trouver par l'addition le quarré de 8000000. Or, pour faire cette double opération, 1°. il faut remplacer par deux zéros le 9 du terme 1300000000000 qui en précède dix autres, le dernier de la série qui nous a servi à trouver les quarrés de la racine qui augmente de cent mille en cent mille, pour avoir 13000000000000, le terme qui nous est nécessaire pour passer des cent mille aux millions, et qui correspond à 7000000, la racine, et à son quarré; 2°. augmenter de 200000000000000 le terme 13000000000000, pour avoir 15000000000000, autre terme de la même série, qui correspond à 8000000, la racine; 3°. additionner 49000000000000, le quarré de 7000000, et 15000000000000, le dernier terme augmenté de..... 2000000000000, pour avoir la somme 64000000000000, qui est le quarré de 8000000.

Mais, afin de trouver les quarrés des millions suivans de la racine, l'opération est plus simple. Il faut, à chaque million qu'on ajoute, et dont on cherche le quarré, 1°. augmenter de 2000000000000 le dernier terme connu; 2°. additionner le dernier quarré trouvé et le terme augmenté de..... 2000000000000. La somme sera toujours le quarré du nombre cherché. Par exemple, on demande le quarré de 9000000. On l'obtient aisément en augmentant de 2000000000000, 15000000000000, le dernier terme de la série, qui est changé en cet autre, 17000000000000; en additionnant..... 64000000000000, quarré de 8000000, et 17000000000000, terme augmenté de 2000000000000. La somme..... 81000000000000 sera le quarré de 9000000. Cette opération simple est facile à voir dans la sixième suite du tableau premier, où l'on aperçoit aussitôt que 13000000000000 est le premier terme qui correspond à 7000000, la racine, et à son quarré; que ce premier terme, augmenté à chaque addition de 2000000000000, compose les termes suivans.

SIXIÈME SUITE DU TABLEAU PREMIER.

Formation des quarrés des millions de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 7000000.

Dans la sixième suite du tableau premier, nous supprimons, pour faciliter l'impression, dans chaque quarré et dans chaque terme de la série, douze zéros qui sont absolument nécessaires, afin de rendre le calcul exact.

Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.	Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.
7000000	49	13	29000000	841	57
8000000	64	15	30000000	900	59
9000000	81	17	31000000	961	61
10000000	100	19	32000000	1024	63
11000000	121	21	33000000	1089	65
12000000	144	23	34000000	1156	67
13000000	169	25	35000000	1225	69
14000000	196	27	36000000	1296	71
15000000	225	29	37000000	1369	73
16000000	256	31	38000000	1444	75
17000000	289	33	39000000	1521	77
18000000	324	35	40000000	1600	79
19000000	361	37	41000000	1681	81
20000000	400	39	42000000	1764	83
21000000	441	41	43000000	1849	85
22000000	484	43	44000000	1936	87
23000000	529	45	45000000	2025	89
24000000	576	47	46000000	2116	91
25000000	625	49	47000000	2209	93
26000000	676	51	48000000	2304	95
27000000	729	53	49000000	2401	97
28000000	784	55	50000000	2500	99

ARTICLE VII.

Règle de transition des millions de la racine à ses dix millions.

Des millions de la racine nous passons aux dix millions. Comme nous voulons continuer notre opération, nous allons faire un tableau des quarrés des dix millions de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 5000000.

Les termes de la série qui servent à former les quarrés de la racine qui augmente de dix millions en dix millions, et que nous appelons, comme les précédentes, *progression génératrice,* sont 100000000000000, 300000000000000, ... 500000000000000, 700000000000000, 900000000000000, ... 1100000000000000, 1300000000000000, 1500000000000000, etc., dont 200000000000000 est la différence constante. Ainsi, il nous faut obtenir le terme de cette série, qui nous fait passer des millions aux dix millions, et qui correspond à 5000000, la racine, et à 25000000000000, son quarré, et celui de la même série, qui nous fait trouver par l'addition le quarré de 6000000. Or, pour faire cette double opération, 1°. il faut remplacer par deux zéros le 9 du dernier terme 9900000000000, qui en précède douze autres, le dernier de la série qui nous a servi à trouver les quarrés de la racine qui augmente de million en million, pour avoir 900000000000000, le terme qui nous est nécessaire pour passer des millions aux dix millions, et qui correspond à 5000000, la racine, et à son quarré; 2°. augmenter de 200000000000000 le terme 900000000000000, pour avoir 1100000000000000, autre terme de la même série qui correspond à 6000000, la racine; 3°. additionner 25000000000000000, le quarré de 5000000, et 1100000000000000, le dernier terme augmenté de 200000000000000, pour avoir la somme 36000000000000000, qui est le quarré de 6000000.

Mais, afin de trouver les quarrés des dix millions suivans

de la racine, l'opération est plus simple. Il faut, à chaque dix millions qu'on ajoute, et dont on cherche le quarré, 1°. augmenter de 200000000000000 le dernier terme connu ; 2°. additionner le dernier quarré trouvé et le terme augmenté de 20000000000000. La somme sera toujours le quarré du nombre cherché. Par exemple, on demande le quarré de 70000000. On l'obtient aisément en augmentant de..... 200000000000000, 110000000000000, le dernier terme de la série, qui est changé en cet autre, 130000000000000 ; en additionnant 360000000000000, quarré de 60000000, et 130000000000000, terme augmenté de 200000000000000. La somme 490000000000000 sera le quarré de 70000000. Cette opération simple est facile à voir dans la septième suite du tableau premier, où l'on aperçoit aussitôt que 900000000000000 est le premier terme qui correspond à 50000000, la racine ; et à son quarré ; que ce premier terme, augmenté à chaque addition de 200000000000000, compose les termes suivans.

SEPTIÈME SUITE DU TABLEAU PREMIER.

Formation des quarrés des dix millions de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 50000000.

Dans la septième suite du tableau premier, nous supprimons, pour faciliter l'impression, dans chaque quarré et dans chaque terme de la série, quatorze zéros qui sont absolument nécessaires, afin de rendre le calcul exact.

Racines.	Quarrés.	Progrès génerat.	Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.
50000000	25	9	100000000	100	19
60000000	36	11	110000000	121	21
70000000	49	13	120000000	144	23
80000000	64	15	130000000	169	25
90000000	81	17	140000000	196	27

Racines.	Quarrés.	Progres. générat.	Racines.	Quarrés.	Progres. générat.
150000000	225	29	230000000	529	45
160000000	256	31	240000000	576	47
170000000	289	33	250000000	625	49
180000000	324	35	260000000	676	51
190000000	361	37	270000000	729	53
200000000	400	39	280000000	784	55
210000000	441	41	290000000	841	57
220000000	484	43	300000000	900	59

ARTICLE VIII.

Règle de transition des dix millions de la racine à ses cent millions.

Des dix millions de la racine nous passons aux cent millions. Comme nous voulons continuer notre opération, nous allons faire un tableau des quarrés des cent millions de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 30000000.

Les termes de la série qui servent à former les quarrés de la racine qui augmente de cent millions en cent millions, et que nous appelons, comme les précédentes, *progression génératrice*, sont 10000000000000000, 30000000000000000, 50000000000000000, 70000000000000000, ... 90000000000000000, 110000000000000000, ... 130000000000000000, 150000000000000000, etc., etc., dont 200000000000000000 est la différence constante. Ainsi, il nous faut obtenir le terme de cette série, qui nous fait passer des dix millions aux cent millions, et qui correspond à 30000000, la racine, et à 900000000000000000, son quarré, et celui de la même série, qui nous fait trouver par l'addition le quarré de 40000000. Or, pour faire cette double opération, 1°. il faut remplacer par deux zéros le 9 du terme 5900000000000000,

qui en précède quatorze autres, le dernier de la série qui nous a servi à trouver les quarrés de la racine qui augmente de dix millions en dix millions, pour avoir 5000000000000000, le terme qui nous est nécessaire pour passer des dix millions aux cent millions, et qui correspond à 30000000, la racine, et à son quarré ; 2°. augmenter de 2000000000000000 le terme 5000000000000000, pour avoir 7000000000000000, autre terme de la même série, qui correspond à 40000000, la racine ; 3°. additionner 9000000000000000, le quarré de 30000000, et 7000000000000000, le dernier terme augmenté de 2000000000000000, pour avoir la somme 1600000000000000, qui est le quarré de 40000000.

Mais, afin de trouver les quarrés des cent millions suivans de la racine, l'opération est plus simple. Il faut, à chaque cent millions qu'on ajoute, et dont on cherche le quarré, 1°. augmenter de 2000000000000000 le dernier terme connu ; 2°. additionner le dernier quarré trouvé et le terme augmenté de 2000000000000000. La somme sera toujours le quarré du nombre cherché. Par exemple, on demande le quarré de 50000000. On l'obtient aisément en augmentant de 2000000000000000, 7000000000000000, le dernier terme de la série, qui est changé en cet autre, 9000000000000000 ; en additionnant 1600000000000000, quarré de 40000000, et 9000000000000000, terme augmenté de 2000000000000000. La somme..... 2500000000000000 sera le quarré de 50000000. Cette opération simple est facile à voir dans la huitième suite du tableau premier, où l'on aperçoit aussitôt que..... 5000000000000000 est le premier terme qui correspond à 30000000, la racine, et à son quarré ; que ce premier terme, augmenté à chaque addition de 2000000000000000, compose les termes suivans.

HUITIÈME SUITE DU TABLEAU PREMIER.

Formation des quarrés des cent millions de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 300000000.

Dans la huitième suite du tableau premier, nous supprimons, pour faciliter l'impression, dans chaque quarré et dans chaque terme de la série, seize zéros qui sont absolument nécessaires, afin de rendre le calcul exact.

Racines.	Quarrés.	Progres. générat.	Racines.	Quarrés.	Progres. générat.
300000000	9	5	1200000000	144	23
400000000	16	7	1300000000	169	25
500000000	25	9	1400000000	196	27
600000000	36	11	1500000000	225	29
700000000	49	13	1600000000	256	31
800000000	64	15	1700000000	289	33
900000000	81	17	1800000000	324	35
1000000000	100	19	1900000000	361	37
1100000000	121	21	2000000000	400	39

TROISIÈME SECTION.

Retour et rapprochement des quarrés des dixaines de la racine, depuis 2000000000, *vers les quarrés de ses unités.*

Dans la racine, nous distinguons deux sortes de dixaines, les dixaines ascendantes et les dixaines descendantes.

Les dixaines ascendantes sont celles qui s'éloignent de plus en plus des unités de la racine, se dirigent et se rapprochent, dans la même proportion, de l'infini.

Les dixaines descendantes sont au contraire celles qui

s'éloignent de plus en plus de l'infini, s'approchent des unités de la racine, et servent à l'extraction de la racine quarrée.

Dans la transition d'une dixaine de la racine à une autre dixaine immédiatement supérieure, la transformation du 9 compris dans le dernier terme de la série qui a servi à trouver les quarrés des dernières dixaines, en deux zéros, qui en précèdent quelques autres, nous fait trouver le terme de la série ascendante appropriée à la dixaine supérieure de la racine et à son quarré, lequel terme de la même série, augmenté à chaque addition de sa différence, produit les termes suivans, qui, additionnés consécutivement, forment tous les quarrés des mêmes dixaines ascendantes.

La méthode pour trouver les quarrés des dixaines ascendantes, répétée dans les huit articles précédens, est facile à concevoir et à exécuter. Ainsi, il est inutile de s'en occuper désormais, puisque nous pouvons, en suivant strictement les principes qui y sont expliqués, qui sont simples et uniformes, passer des quarrés des unités aux quarrés de ses dixaines, des quarrés de ses dixaines aux quarrés de ses centaines, des quarrés de ses centaines aux quarrés de ses mille, etc.; ensuite, après chacune de ses diverses transitions, obtenir les quarrés de cette racine, qui croît de dixaine en dixaine, de centaine en centaine, de mille en mille, etc. Cette méthode tend à nous faire trouver les quarrés des plus grands nombres, qui vont à l'infini. Les séries ascendantes, dont on se sert pour les former, s'obtiennent, ainsi que nous l'avons déjà dit, à chaque transition d'une dixaine de la racine à une autre immédiatement supérieure, par la transformation du 9 de la précédente série, en deux zéros.

Maintenant, la même méthode, prise en raison inverse, nous fera trouver les quarrés des dixaines descendantes de la racine, qui, pourtant dans ce calcul, augmentera de valeur numérique. Ses quarrés nous font approcher de plus en plus de ceux de ses unités, et résultent de l'addition

successive des termes des séries descendantes, qui, à chaque transition d'une dixaine de la racine à une autre immédiatement inférieure, diminuent de deux zéros, qui sont remplacés par un 9.

Ainsi, la méthode de nous servir de ces séries pour trouver les quarrés des dixaines descendantes de la racine, et puis ceux de ses unités, nous servira aussi à trouver l'extraction de la racine quarrée d'un nombre quelconque.

Les règles de cette méthode veulent que, pour descendre successivement des quarrés des cent millions de la racine 2000000000, dont 4000000000000000000 est le quarré, en ceux des dixaines descendantes, nous rappelions que.... 3900000000000000 est le dernier terme de la série qui nous a fait avoir les quarrés de la racine croissante de cent millions en cent millions.

Mais, afin d'abréger et de mettre plus d'ordre dans cette troisième section, où nous allons former les quarrés des dixaines descendantes de la racine, nous la divisons en huit articles, et nous nous servirons des séries descendantes pour trouver leurs quarrés, et enfin ceux de ses unités. Nous observons qu'en employant seulement la série primitive, à laquelle nous coordonnerions toutes nos opérations, nous obtiendrions les mêmes résultats.

ARTICLE PREMIER.

Règle de transition des cent millions de la racine à ses dix millions.

D'abord, pour descendre des quarrés des cent millions de la racine 2000000000, dont 4000000000000000000 est le quarré, et 3900000000000000000 est le terme correspondant de la série qui a servi à trouver ceux de la racine accrue de cent millions en cent millions, dans les quarrés de dix millions en dix millions, il faut trouver les termes de la série immédiatement inférieure qui opère ce résultat. Or, pour

les trouver, 1°. il est nécessaire de supprimer deux zéros de ce même terme, 3900000000000000000, que nous remplaçons par un 9, et ainsi de le changer en cet autre, 3990000000000000, que nous faisons correspondre à.... 2000000000, et à son quarré; 2°. d'ajouter deux unités au chiffre de ce même terme, placé devant les quatorze zéros, pour avoir 4010000000000000, le terme de la série correspondant à 2010000000, la racine dont on cherche le quarré; 3°. d'additionner 4000000000000000000, quarré de..... 2000000000, et 4010000000000000, le terme de la série augmenté de 2000000000000000, pour avoir la somme 4040100000000000000, qui est le quarré de 2010000000. Cette opération est facile à voir dans la neuvième suite du tableau premier, où l'on aperçoit aussitôt que..... 3990000000000000 est le premier terme de la série qui correspond à 2000000000 et à son quarré; que ce premier terme, accru à chaque addition de 2000000000000000, compose les termes suivans, qui, additionnés successivement avec les quarrés précédens, forment les quarrés de la racine qui augmente de dix millions en dix millions.

NEUVIÈME SUITE DU TABLEAU PREMIER.

Formation des quarrés des dix millions de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 2000000000.

Dans la neuvième suite du tableau premier, nous supprimons, pour faciliter l'impression, dans chaque quarré et dans chaque terme de la série, quatorze zéros qui sont absolument nécessaires, afin de rendre le calcul exact.

Racines.	Quarrés.	Progres. générat.	Racines.	Quarrés.	Progres. générat.
2000000000	40000	399	2030000000	41209	405
2010000000	40401	401	2040000000	41616	407
2020000000	40804	403	2050000000	42025	409

Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.	Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.
2060000000	42436	411	2410000000	58081	481
2070000000	42849	413	2420000000	58564	483
2080000000	43264	415	2430000000	59049	485
2090000000	43681	417	2440000000	59536	487
2100000000	44100	419	2450000000	60025	489
2110000000	44521	421	2460000000	60516	491
2120000000	44944	423	2470000000	61009	493
2130000000	45369	425	2480000000	61504	495
2140000000	45796	427	2490000000	62001	497
2150000000	46225	429	2500000000	62500	499
2160000000	46656	431	2510000000	63001	501
2170000000	47089	433	2520000000	63504	503
2180000000	47524	435	2530000000	64009	505
2190000000	47961	437	2540000000	64516	507
2200000000	48400	439	2550000000	65025	509
2210000000	48841	441	2560000000	65536	511
2220000000	49284	443	2570000000	66049	513
2230000000	49729	445	2580000000	66564	515
2240000000	50176	447	2590000000	67081	517
2250000000	50625	449	2600000000	67600	519
2260000000	51076	451	2610000000	68121	521
2270000000	51529	453	2620000000	68644	523
2280000000	51984	455	2630000000	69169	525
2290000000	52441	457	2640000000	69696	527
2300000000	52900	459	2650000000	70225	529
2310000000	53361	461	2660000000	70756	531
2320000000	53824	463	2670000000	71289	533
2330000000	54289	465	2680000000	71824	535
2340000000	54756	467	2690000000	72361	537
2350000000	55225	469	2700000000	72900	539
2360000000	55696	471	2710000000	73441	541
2370000000	56169	473	2720000000	73984	543
2380000000	56644	475	2730000000	74529	545
2390000000	57121	477	2740000000	75076	547
2400000000	57600	479	2750000000	75625	549

Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.	Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.
2760000000	76176	551	2870000000	82369	573
2770000000	76729	553	2880000000	82944	575
2780000000	77284	555	2890000000	83521	577
2790000000	77841	557	2900000000	84100	579
2800000000	78400	559	2910000000	84681	581
2810000000	78961	561	2920000000	85264	583
2820000000	79524	563	2930000000	85849	585
2830000000	80089	565	2940000000	86436	587
2840000000	80656	567	2950000000	87025	589
2850000000	81225	569	2960000000	87616	591
2860000000	81796	571			

ARTICLE II.

Règle de transition des dix millions de la racine à ses millions.

Secondement, pour passer des quarrés des dix millions à ceux des millions qui suivent immédiatement la racine 2960000000, dont 8761600000000000000 est le quarré, et 5910000000000000 est le terme correspondant de la série qui a servi à trouver les quarrés de la racine accrue de dix millions en dix millions, et puis pour former successivement les quarrés de cette racine, qui croît de million en million, il faut trouver les termes de la série immédiatement inférieure qui opère ce double résultat. Or, pour les trouver, 1°. il est nécessaire de supprimer deux zéros de ce même terme, 5910000000000000, que l'on remplace par un 9, et ainsi de le changer en cet autre, 5919000000000000, que nous faisons correspondre à ... 2960000000 et à son quarré; 2°. d'ajouter deux unités au chiffre de ce même terme, placé devant les douze zéros, pour avoir 5921000000000000, le terme de la série corres-

pondant à 2961000000, dont on cherche le quarré; 3°. d'additionner 876160000000000000, quarré de 2960000000, et 592100000000000, le terme de la série augmenté de 200000000000, pour avoir la somme 8767521000000000000, qui est vraiment le quarré de 2961000000. Cette opération est facile à voir dans la dixième suite du tableau premier, où l'on aperçoit aussitôt que 591900000000000 est le premier terme de la série qui correspond à 2960000000, la racine, et à son quarré; que ce premier terme, accru à chaque addition de 200000000000, compose les termes suivans, qui, additionnés avec les quarrés précédens, forment les quarrés de la racine qui augmente de million en million.

DIXIÈME SUITE DU TABLEAU PREMIER.

Formation des quarrés des millions de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 2960000000.

Dans la dixième suite du tableau premier, nous supprimons, pour faciliter l'impression, dans chaque quarré et dans chaque terme de la série, douze zéros qui sont absolument nécessaires, afin de rendre le calcul exact.

Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.	Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.
2960000000	8761600	5919	2970000000	8820900	5939
2961000000	8767521	5921	2971000000	8826841	5941
2962000000	8773444	5923	2972000000	8832784	5943
2963000000	8779369	5925	2973000000	8838729	5945
2664000000	8785296	5927	2974000000	8844676	5947
2965000000	8791225	5929	2975000000	8850625	5949
2966000000	8797156	5931	2976000000	8856576	5951
2967000000	8803089	5933	2977000000	8862529	5953
2968000000	8809024	5935	2978000000	8868484	5955
2969000000	8814961	5937	2979000000	8874441	5957

Racines.	Quarrés.	Progres. génerat.	Racines.	Quarrés.	Progres génerat.
2980000000	8880400	5959	2990000000	8940100	5979
2981000000	8886361	5961	2991000000	8946081	5981
2982000000	8892324	5963	2992000000	8952064	5983
2983000000	8898289	5965	2993000000	8958049	5985
2984000000	8904256	5967	2994000000	8964036	5987
2985000000	8910225	5969	2995000000	8970025	5989
2986000000	8916196	5971	2996000000	8976016	5991
2987000000	8922169	5973	2997000000	8982009	5993
2988000000	8928144	5975	2998000000	8988004	5995
2989000000	8934121	5977			

ARTICLE III.

Règle de transition des millions de la racine à ses cent mille.

Troisièmement, pour passer des quarrés des millions à ceux des cent mille qui suivent immédiatement la racine 2998000000, dont 8988004000000000000 est le quarré, et 599500000000000 est le terme correspondant de la série qui a servi à trouver les quarrés de la racine accrue de million en million, et puis pour former successivement les quarrés de cette racine, qui croît de cent mille en cent mille, il faut trouver les termes de la série immédiatement inférieure qui opère ce double résultat. Or, pour les trouver, il est nécessaire, 1°. de supprimer deux zéros de ce même terme, 599500000000000, que l'on remplace par un 9, et ainsi de le changer en cet autre, 599590000000000, que nous faisons correspondre à 299800000, la racine, et à son quarré; 2°. d'ajouter deux unités au chiffre de ce même terme, placé devant les dix zéros, pour avoir 599610000000000, le terme de la série correspondant à 299810000, dont on

chercher le quarré; 3°. d'additionner 89880400000000000, quarré de 299800000, et 599610000000000, le terme de la série augmenté de 200000000000, pour avoir la somme 898802361000000000000, qui est vraiment le quarré de 29981000000. Cette opération est facile à voir dans la onzième suite du tableau premier, où l'on aperçoit aussitôt que 599500000000000 est le premier terme de la série qui correspond à 29980000000, la racine, et à son quarré; que ce premier terme, accru à chaque addition de 200000000000, compose les termes suivans, qui, additionnés avec les quarrés précédens, forment les quarrés de la racine qui augmente de cent mille en cent mille.

ONZIÈME SUITE DU TABLEAU PREMIER.

Formation des quarrés des cent mille de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 2998000000.

Dans la onzième suite du tableau premier, nous supprimons, pour faciliter l'impression, dans chaque quarré et dans chaque terme de la série, dix zéros qui sont absolument nécessaires, afin de rendre le calcul exact.

Racines.	Quarrés.	Progression génératrice.
2998000000	898800400	59959
2998100000	898860361	59961
2998200000	898920324	59963
2998300000	898980289	59965
2998400000	899040256	59967
2998500000	899100225	59969
2998600000	899160196	59971
2998700000	899220169	59973
2998800000	899280144	59975
2998900000	899340121	59977

Racines.	Quarrés.	Progression génératrice.
2999000000	899400100	59979
2999100000	899460081	59981
2999200000	899520064	59983
2999300000	899580049	59985
2999400000	899640036	59987
2999500000	899700025	59989
2999600000	899760016	59991
2999700000	899820009	59993
2999800000	899880004	59995

ARTICLE IV.

Règle de transition des cent mille de la racine à ses di mille.

Quatrièmement, pour passer des quarrés des cent mille i ceux des dix mille qui suivent immédiatement la racin 2999800000, dont 899880004000000000 est le quarré, e 599950000000000 est le terme correspondant de la série qu a servi à trouver les quarrés de la racine accrue de cen mille en cent mille, et puis pour former successivement le quarrés de cette racine, qui croît de dix mille en dix mille, il faut trouver les termes de la série immédiatement infé rieure qui opère ce double résultat. Or, pour les trouver, il est nécessaire, 1°. de supprimer deux zéros de ce même terme, 599950000000000, que l'on remplace par un 9, et ainsi de le changer en cet autre, 599959000000000, que nous faisons correspondre à 2999800000, la racine, et à son quarré; 2°. d'ajouter deux unités au chiffre de ce même terme, placé devant les huit zéros, pour avoir..... 599961000000000, le terme de la série correspondant à

2999810000, dont on cherche le quarré ; 3°. d'additionner 8998800040000000000, quarré de 2999800000, et..... 5999610000000000, le terme de la série augmenté de 200000000, pour avoir la somme 8998860036100000000, qui est vraiment le quarré de 2999810000. Cette opération est facile à voir dans la douzième suite du tableau premier, où l'on aperçoit aussitôt que 5999590000000 est le premier terme de la série qui correspond à 2999800000, la racine, et à son quarré ; que ce premier terme, accru à chaque addition de 200000000, compose les termes suivans, qui, additionnés avec les quarrés précédens, forment les quarrés de la racine qui augmente de dix mille en dix mille.

DOUZIÈME SUITE DU TABLEAU PREMIER.

Formation des quarrés des dix mille de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 2999800000.

Dans la douzième suite du tableau premier, nous supprimons, pour faciliter l'impression, dans chaque quarré et dans chaque terme de la série, huit zéros qui sont absolument nécessaires, afin de rendre le calcul exact.

Racines.	Quarrés.	Progression génératrice.
2999800000	899880004 00	599959
2999810000	899886003 61	599961
2999820000	899892003 24	599963
2999830000	899898002 89	599965
2999840000	899904002 56	599967
2999850000	899910002 25	599969
2999860000	899916001 96	599971
2999870000	899922001 69	599973
2999880000	899928001 44	599975
2999890000	899934001 21	599977

Racines.	Quarrés.	Progression génératrice.
2999900000	8999400061 00	599979
2999910000	8999460000 81	599981
2999920000	8999520000 64	599983
2999930000	8999580000 49	599985
2999940000	8999640000 36	599987
2999950000	8999700000 25	599989
2999960000	8999760000 16	599991
2999970000	8999820000 09	599993
2999980000	8999880000 04	599995

ARTICLE V.

Règle de transition des dix mille de la racine à ses mille.

Cinquièmement, pour passer des quarrés des dix mille à ceux des mille qui suivent immédiatement la racine.... 2999980000, dont 8999880000400000000 est le quarré, et 5999950000000000 est le terme correspondant de la série qui a servi à trouver les quarrés de la racine accrue de dix mille en dix mille, et puis pour former successivement les quarrés de cette racine, qui croît de mille en mille, il faut trouver les termes de la série immédiatement inférieure qui opère ce double résultat. Or, pour les trouver, il est nécessaire, 1°. de supprimer deux zéros de ce même terme..... 5999950000000000, que l'on remplace par un 9, et ainsi de le changer en cet autre, 5999959000000, que nous faisons correspondre à 2999980000, la racine, et à son quarré; 2°. d'ajouter deux unités au chiffre de ce même terme, placé devant les six zéros, pour avoir 5999961000000, le terme de la série correspondant à 2999981000, dont on cherche le quarré; 3°. d'additionner 8999880000400000000,

quarré de 299998oooo, et 5999961oooooo, le terme de la série augmenté de 2000000, pour avoir la somme..... 8999886ooo361oooooo, qui est vraiment le quarré de 29999810oo. Cette opération est facile à voir dans la treizième suite du tableau premier, où l'on aperçoit aussitôt que 5999959oooooo est le premier terme de la série qui correspond à 299998oooo, la racine, et à son quarré; que ce premier terme, accru à chaque addition de 2000000, compose les termes suivans, qui, additionnés avec les quarrés précédens, forment les quarrés de la racine qui augmente de mille en mille.

TREIZIÈME SUITE DU TABLEAU PREMIER.

Formation des quarrés des mille de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 299998oooo.

Dans la treizième suite du tableau premier, nous supprimons, pour faciliter l'impression, dans chaque quarré et dans chaque terme de la série, six zéros qui sont absolument nécessaires, afin de rendre le calcul exact.

Racines.	Quarrés.	Progression génératrice.
299998oooo	8999880000400	5999959
299998looo	8999886000361	5999961
299998200o	8999892000324	5999963
299998300o	8999898000289	5999965
299998400o	8999904000256	5999967
299998500o	8999910000225	5999969
299998600o	8999916000196	5999971
299998700o	8999922000169	5999973
299998800o	8999928000144	5999975
299998900o	8999934000121	5999977

Racines.	Quarrés.	Progression génératrice.
2999990000	8999940000100	5999979
2999991000	8999946000081	5999981
2999992000	8999952000064	5999983
2999993000	8999958000049	5999985
2999994000	8999964000036	5999987
2999995000	8999970000025	5999989
2999996000	8999976000016	5999991
2999997000	8999982000009	5999993
2999998000	8999988000004	5999995

ARTICLE VI.

Règle de transition des mille de la racine à ses centaines.

Sixièmement, pour passer des quarrés des mille à ceux des centaines qui suivent immédiatement la racine 2999998000, dont 8999988000004000000 est le quarré, et 5999995000000 est le terme correspondant de la série qui a servi à trouver les quarrés de la racine accrue de mille en mille, et puis pour former successivement les quarrés de cette racine, qui croît de centaine en centaine, il faut trouver les termes de la série immédiatement inférieure qui opère ce double résultat. Or, pour les trouver, il est nécessaire, 1°. de supprimer deux zéros de ce même terme, 5999995000000, que l'on remplace par un 9, et ainsi de le changer en cet autre, 5999995900000, que nous faisons correspondre à 2999998000, la racine, et à son quarré; 2°. d'ajouter deux unités au chiffre de ce même terme, placé devant les quatre zéros, pour avoir 5999996100000, le terme de la série correspondant à 2999998100, dont on cherche le quarré; 3°. d'additionner 8999988000004000000, quarré de.....

2999998000, et 5999996100000, le terme de la série augmenté de 20000, pour avoir la somme 8999988600003610000, qui est vraiment le quarré de 2999998100. Cette opération est facile à voir dans la quatorzième suite du tableau premier, où l'on aperçoit aussitôt que 5999995900000 est le premier terme de la série qui correspond à 2999998000, la racine, et à son quarré; que ce premier terme, accru à chaque addition de 20000, compose les termes suivans, qui, additionnés avec les quarrés précédens, forment les quarrés de la racine qui augmente de centaine en centaine.

QUATORZIÈME SUITE DU TABLEAU PREMIER.

Formation des quarrés des centaines qui suivent immédiatement ceux du nombre 2999998000.

Dans la quatorzième suite du tableau premier, nous supprimons, pour faciliter l'impression, dans chaque quarré et dans chaque terme de la série, quatre zéros qui sont absolument nécessaires, afin de rendre le calcul exact.

Racines.	Quarrés.	Progression génératrice.
2999998000	8999988000004000	59999959
2999998100	8999988600003610	59999961
2999998200	8999989200003224	59999963
2999998300	8999989800002890	59999965
2999998400	8999990400002560	59999967
2999998500	8999991000002250	59999969
2999998600	8999991600001960	59999971
2999998700	8999992200001690	59999973
2999998800	8999992800001440	59999975
2999998900	8999993400001210	59999977

Racines.	Quarrés.	Progression génératrice.
2999999000	899999400000100	59999979
2999999100	899999460000081	59999981
2999999200	899999520000064	59999983
2999999300	899999580000049	59999985
2999999400	899999640000036	59999987
2999999500	899999700000025	59999989
2999999600	899999760000016	59999991
2999999700	899999820000009	59999993
2999999800	899999880000004	59999995

ARTICLE VII.

Règle de transition des centaines de la racine à ses dixaines.

Septièmement, pour passer des quarrés des centaines à ceux des dixaines qui suivent immédiatement la racine. 2999999800, dont 899999880000004 0000 est le quarré, et 59999995 0000 est le terme correspondant de la série qui a servi à trouver les quarrés de la racine accrue de centaine en centaine, et puis pour former successivement les quarrés de cette racine, qui croît de dixaine en dixaine, il faut trouver les termes de la série immédiatement inférieure qui opère ce double résultat. Or, pour les trouver, il est nécessaire, 1°. de supprimer deux zéros de ce même terme, 59999995 0000, que l'on remplace par un 9, et ainsi de le changer en cet autre, 5999999 5900, que nous faisons correspondre à 2999999800, la racine, et à son quarré; 2°. d'ajouter deux unités au chiffre de ce même terme, placé devant les deux zéros, pour avoir 5999999 6100, le terme de la série correspondant à 2999999810, dont on cherche le quarré; 3°. d'additionner 899999880000004 00

quarré de 2999999800, et 5999999[illegible]100, le terme de la série augmenté de 200, pour avoir la somme..... 8999998[illegible]36100, qui est vraiment le quarré de 2999999810. Cette opération est facile à voir dans la quinzième suite du tableau premier, où l'on aperçoit aussitôt que 5999999[illegible]900 est le premier terme de la série qui correspond à 2999999800, la racine, et à son quarré; que ce premier terme, accru à chaque addition de 200, compose les termes suivans, qui, additionnés avec les quarrés précédens, forment les quarrés de la racine qui augmente de dixaine en dixaine.

QUINZIÈME SUITE DU TABLEAU PREMIER.

Formation des quarrés des dixaines de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 2999999800.

Racines.	Quarrés.	Progression génératrice
2999999800	8999998800000040000	5999999[illegible]900
2999999810	8999998860000036100	5999999[illegible]100
2999999820	8999998920000032400	5999999[illegible]300
2999999830	8999998980000028900	5999999[illegible]500
2999999840	8999999040000025600	5999999[illegible]700
2999999850	8999999100000022500	5999999[illegible]900
2999999860	8999999160000019600	5999999[illegible]100
2999999870	8999999220000016900	5999999[illegible]300
2999999880	8999999280000014400	5999999[illegible]500
2999999890	8999999340000012100	5999999[illegible]700
2999999900	8999999400000010000	5999999[illegible]900
2999999910	8999999460000008100	5999999[illegible]100
2999999920	8999999520000006400	5999999[illegible]300
2999999930	8999999580000004900	5999999[illegible]500
2999999940	8999999640000003600	5999999[illegible]700
2999999950	8999999700000002500	5999999[illegible]900
2999999960	8999999760000001600	5999999[illegible]100
2999999970	8999999820000000900	5999999[illegible]300
2999999980	8999999880000000400	5999999[illegible]500

ARTICLE VIII.

Règle de transition des dixaines de la racine à ses unités.

Huitièmement, pour passer des quarrés des dixaines à ceux des unités qui suivent immédiatement la racine 299999998o, dont 89999998800000004oo est le quarré, et 5999999950o est le terme correspondant de la série qui a servi à trouver les quarrés de la racine accrue de dixaine en dixaine, et puis pour former successivement les quarrés de cette racine qui croît d'unité en unité, il faut trouver les termes de la série immédiatement inférieure qui opère ce double résultat. Or, pour les trouver, il est nécessaire, 1°. de supprimer les deux zéros de ce même terme, 5999999950o, que l'on remplace par un 9, et ainsi de le changer en cet autre, 599999959, qui alors devient un terme de la série primitive, et que nous faisons correspondre à 299999998o, la racine, et à son quarré; 2°. d'ajouter deux unités au chiffre 9, dernier du même terme 599999959, pour avoir..... 599999961, le terme de la série correspondant à 299999998i, dont on cherche le quarré; 3°. d'additionner..... 89999998800000004oo, quarré de 299999998o, et..... 599999961, le terme de la série primitive augmenté de deux unités, pour avoir la somme 89999998860000036i, qui est vraiment le quarré de 299999998i. Cette opération est facile à voir dans la seizième suite du tableau premier, où l'on aperçoit aussitôt que 599999959 est le premier terme de la série qui correspond à 299999998o, la racine, et à son quarré; que ce premier terme, accru à chaque addition de deux unités, compose les termes suivans, qui, additionnés avec les quarrés précédens, forment les quarrés de la racine qui augmente d'unité en unité.

SEIZIÈME SUITE DU TABLEAU PREMIER.

Formation des quarrés des unités de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 299999980.

Racines.	Quarrés.	Progression génératrice.
299999980	89999998800000004 00	5999999959
299999981	89999998860000003 61	5999999961
299999982	89999998920000003 24	5999999963
299999983	89999998980000002 89	5999999965
299999984	89999999040000002 56	5999999967
299999985	89999999100000002 25	5999999969
299999986	89999999160000001 96	5999999971
299999987	89999999220000001 69	5999999973
299999988	89999999280000001 44	5999999975
299999989	89999999340000001 21	5999999977
299999990	89999999400000001 00	5999999979
299999991	89999999460000000 81	5999999981
299999992	89999999520000000 64	5999999983
299999993	89999999580000000 49	5999999985
299999994	89999999640000000 36	5999999987
299999995	89999999700000000 25	5999999989
299999996	89999999760000000 16	5999999991
299999997	89999999820000000 09	5999999993
299999998	89999999880000000 04	5999999995
299999999	89999999940000000 01	5999999997
300000000	90000000000000000 00	5999999999

Nous observons que, dans chaque transition des dixaines ascendantes ou descendantes des racines dont on forme les quarrés, si l'on veut connaître, à commencer depuis leurs dixaines les plus élevées, ou bien depuis leurs dixaines ascendantes ou descendantes, prises à volonté pour finir, jusques et compris leurs unités, leurs quarrés successifs et leurs

unités, il faut employer les règles de l'extraction des racines quarrées.

QUATRIÈME SECTION.

Vérification des quarrés des racines ascendantes de dixaine en dixaine, et ainsi descendantes.

La progression arithmétique 1, 3, 5, 7, 9, 11, etc., etc., que nous appelons *progression génératrice*, par la raison qu'elle a la propriété immuable de former par l'addition tous les quarrés des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., soit qu'ils soient calculés d'unité en unité, soit qu'ils soient calculés de dixaine en dixaine ascendante, ainsi élevés vers les grands nombres, et rapprochés de plus en plus de l'infini, soit enfin qu'ils soient calculés depuis un grand nombre de dixaine en dixaine descendante, et ainsi rapprochés de ses unités; la formation des quarrés, tant des nombres naturels que de ceux considérés dans leur ascension de dixaine en dixaine vers les grands nombres, et dans leur descente de dixaine en dixaine vers les unités, est aussi sûre que facile, puisqu'elle résulte de diverses séries parfaitement semblables, lesquelles, additionnées consécutivement, produisent de toute nécessité les divers quarrés des racines correspondantes.

Afin d'être assuré si les quarrés des grands nombres sont exacts, il faut les comparer, abstraction faite des zéros, aux quarrés des nombres naturels. Ainsi, nous voyons avec certitude que les quarrés de la première, seconde, troisième, quatrième, cinquième, sixième, septième, huitième et neuvième suite du tableau premier, peuvent être comparés, abstraction faite des zéros, aux quarrés des nombres naturels calculés jusqu'à 2100 unités; qu'ils sont exactement

les quarrés des racines correspondantes, puisque les chiffres, comparés de part et d'autre, se trouvent être les mêmes. Telle a été notre boussole pour la formation des quarrés des racines dans les neuf premières suites du tableau premier.

Afin d'être assuré si les quarrés de la dixième, onzième, douzième, treizième, quatorzième, quinzième et seizième suite du tableau premier sont exacts, nous avons fait les tableaux des quarrés postérieurs à la neuvième, dixième, onzième, douzième, treizième, quatorzième et quinzième suite du tableau premier, destinés à vérifier leur exactitude.

En effet, la racine descendante d'une dixaine vers ses unités égale, à chaque dixaine, la même racine accrue d'une unité avant sa transition, et le quarré de la première égale le quarré de la seconde. Ainsi les tableaux ci-après, dont les racines et leurs quarrés ont été comparés aux dixaines des racines et à leurs quarrés exprimés dans les sept dernières suites du tableau premier, constatent cette vérité.

Pour faciliter l'impression, nous omettons les zéros des racines, des quarrés et des termes de la série, qui cependant sont absolument nécessaires, afin de rendre le calcul exact.

I. Les quarrés postérieurs à ceux des dix millions de la racine compris dans la neuvième suite du tableau premier sont destinés à vérifier les quarrés de la racine qui augmente de million en million; ensuite, nous terminerons la vérification, en passant des dix millions de la racine à ses millions, et en mettant, pour opérer cette transition, à la suite de la racine suivante 299 un zéro, pour avoir la racine 2990, dont le quarré est 8940100, et le terme correspondant de la série est 5979, qui égale le double moins un de la racine 2990, et qui, à chaque addition, est augmenté de deux unités.

Racines.	Quarrés.	Progression génératrice.
296	87616	591
297	88209	593
298	88804	595
Transition des dix millions de la racine à ses millions.		
2990	8940100	5979
2991	8946081	5981
2992	8952064	5983
2993	8958049	5985
2994	8964036	5987
2995	8970025	5989
2996	8976016	5991
2997	8982009	5993
2998	8988004	5995

II. Les quarrés postérieurs à ceux des millions de la racine compris dans la dixième suite du tableau premier sont destinés à vérifier les quarrés de la racine qui augmente de cent mille en cent mille; ensuite, nous terminerons la vérification, en passant des millions aux cent mille, et en mettant, pour opérer cette transition, à la suite de la racine suivante 2999 un zéro, pour avoir la racine 29990, dont le quarré est 899400100, et le terme correspondant de la série est 59979, qui égale le double moins un de la racine 29990, et qui, à chaque addition, est augmenté de deux unités.

Racines.	Quarrés.	Progression génératrice.
2998	8988004	5995
2999	8994001	5997
Transition des millions de la racine en cent mille.		
29990	899400100	59979
29991	899460081	59981
29992	899520064	59983
29993	899580049	59985
29994	899640036	59987
29995	899700025	59989
29996	899760016	59991
29997	899820009	59993
29998	899880004	59995

III. Les quarrés postérieurs à ceux des cent mille de la racine compris dans la onzième suite du tableau premier sont destinés à vérifier les quarrés de la racine qui augmente de dix mille en dix mille ; ensuite, nous terminerons la vérification, en passant des cent mille aux dix mille, et en mettant, pour opérer cette transition, à la suite de la racine suivante 29999 un zéro, pour avoir la racine 299990, dont le quarré est 89994000100, et le terme correspondant de la série est 599979, qui égale le double moins un de la racine 299990, et qui, à chaque addition, est augmenté de deux unités.

Racines.	Quarrés.	Progression génératrice.
29998	899880004	59995
29999	89994 0001	59997

Transition dès cent mille de la racine en dix mille.

Racines.	Quarrés.	Progression génératrice.
299990	89994000100	599979
299991	89994600081	599981
299992	89995200064	599983
299993	89995800049	599985
299994	89996400036	599987
299995	89997000025	599989
299996	89997600016	599991
299997	89998200009	599993
299998	89998800004	599995

IV. Les quarrés postérieurs à ceux des dix mille de la racine compris dans la douzième suite du tableau premier sont destinés à vérifier les quarrés de la racine qui augmente de mille en mille; ensuite, nous terminerons la vérification, en passant des dix mille aux mille, et en mettant, pour opérer cette transition, à la suite de la racine suivante 299999 un zéro, pour avoir la racine 2999990, dont le quarré est 89999400001oo est le terme correspondant de la série est 5999979, qui égale le double moins un de la racine 2999990, et qui, à chaque addition, est augmenté de deux unités.

Racines.	Quarrés.	Progression génératrice.
299998	89998800004	599995
299999	89999400001	599997

Transition des dix mille de la racine en mille.

Racines.	Quarrés.	Progression génératrice.
2999990	899994000e100	5999979
2999991	899994600e081	5999981
2999992	899995200e064	5999983
2999993	899995800e049	5999985
2999994	899996400e036	5999987
2999995	899997000e025	5999989
2999996	899997600e016	5999991
2999997	899998200e009	5999993
2999998	899998800e004	5999995

V. Les quarrés postérieurs à ceux des mille de la racine compris dans la treizième suite du tableau premier sont destinés à vérifier les quarrés de la racine qui augmente de centaine en centaine; ensuite, nous terminerons la vérification, en passant des mille aux centaines, et en mettant, pour opérer cette transition, à la suite de la racine suivante 2999999 un zéro, pour avoir la racine 29999990, dont le quarré est 899999400000100, et le terme correspondant de la série est 59999979, qui égale le double moins un de la racine 29999990, et qui, à chaque addition, est augmenté de deux unités.

Racines.	Quarrés.	Progression génératrice.
2999998	899998800e004	5999995
2999999	899999400e001	5999997

Transition des mille de la racine en centaines.

Racines.	Quarrés.	Progression génératrice.
29999990	899999400000100	59999979
29999991	899999460000081	59999981
29999992	899999520000064	59999983
29999993	899999580000049	59999985
29999994	899999640000036	59999987
29999995	899999700000025	59999989
29999996	899999760000016	59999991
29999997	899999820000009	59999993
29999998	899999880000004	59999995

VI. Les quarrés postérieurs à ceux des centaines de la racine compris dans la quatorzième suite du tableau premier sont destinés à vérifier les quarrés de la racine qui augmentent de dixaine en dixaine; ensuite, nous terminerons la vérification, en passant des centaines aux dixaines, et en mettant pour opérer cette transition, à la suite de la racine suivante 29999999 un zéro, pour avoir la racine 299999990, dont le quarré est 89999994000000100, et le terme correspondant de la série est 599999979, qui égale le double moins un de la racine 299999990, et qui, à chaque addition, est augmenté de deux unités.

Racines.	Quarrés.	Progression génératrice.
29999998	899999880000004	59999995
29999999	899999940000001	59999997

Transition des centaines de la racine aux dixaines.

Racines.	Quarrés	Progression génératrice.
29999990	899999940000000100	599999979
29999991	899999946000000081	599999981
29999992	899999952000000064	599999983
29999993	899999958000000049	599999985
29999994	899999964000000036	599999987
29999995	899999970000000025	599999989
29999996	899999976000000016	599999991
29999997	899999982000000009	599999993
29999998	899999988000000004	599999995

VII. Les quarrés postérieurs à ceux des dixaines de la racine compris dans la quinzième suite du tableau premier sont destinés à vérifier les quarrés de la racine qui augmente d'unité en unité.

Racines.	Quarrés.	Progression génératrice.
299999980	89999998800000004 00	5999999900
299999990	89999999400000001 00	5999999700
300000000	900000000000000000	5999999900

Nous observons que, pour trouver les quarrés postérieurs à ceux des dixaines de la racine compris dans la quinzième suite du tableau premier, nous avons mis deux zéros à la suite de 59999995, le dernier terme de la série, pour

avoir 5999999500, puis nous avons augmenté, à chaq addition, de deux unités le chiffre qui précède les deu zéros.

La progression arithmétique 1, 3, 5, 7, etc., etc., q nous appelons *progression génératrice*, par la raison qu'el nous fait trouver, par l'addition, tous les quarrés des nom bres naturels. Cette série est le principe primitif d'où d coulent toutes les règles que nous avons données pour for mer tous les quarrés de la racine qui augmente d'unit en unité, de dixaine en dixaine ascendante vers les plu grands nombres, et ainsi se dirige de plus en plus ver l'infini. Cette série doit être prise en raison inverse pou trouver, à compter d'un nombre donné, quelque grand qu'il soit, tous les quarrés de la racine descendante de dixain en dixaine vers ses unités. Toutes les règles pour obtenir les quarrés des dixaines ascendantes de la racine émanent des séries ascendantes parfaitement semblables à la pre-mière, et produisant les mêmes résultats; toutes celles pour obtenir les quarrés des dixaines descendantes de la racine vers ses unités émanent des séries descendantes également semblables à la première, et produisant les mêmes résultats. Ces dernières règles servent aussi à extraire la racine quarrée d'un nombre donné. La facilité avec laquelle on forme tous les quarrés de la racine ascendante ou descendante de dixaine en dixaine, provient des élémens qui procèdent de leur source naturelle. Ainsi, il résulte nécessairement que la série primordiale, qui a la propriété invariable de nous faire trouver aisément, par l'addition, tous les quarrés des racines correspondantes, et qui de même nous a fait trouver le quarré de la racine 3000000000 et ceux de toutes les racines qui lui sont antérieures, est vraiment la progression génératrice des quarrés.

En général, nous observons que les séries ascendantes, qui ont la propriété immuable de former les quarrés des

acines ascendantes vers l'infini, se trouvent aisément en ransformant chaque neuf de la série précédente en deux éros, pour avoir la série suivante; et que les séries des-endantes, qui également ont la propriété immuable de ormer les quarrés des racines descendantes vers ses uni-és, se trouvent aussi aisément en transformant deux zé-os de la série précédente en un neuf, pour avoir la sé-ie suivante.

CHAPITRE DEUXIÈME.

DE L'EXTRACTION DE LA RACINE QUARRÉE.

PREMIÈRE SECTION.

Première méthode d'extraire la racine quarrée.

Nous avons fait connaître la manière de trouver les quarrés de la racine qui s'élève de dixaine en dixaine vers les plus grands nombres, et se rapproche de plus en plus de l'infini. Comme nous avons vu que les séries ascendantes dont les différences entre les termes respectifs sont 2, 200, 20000, 2000000, 200000000, 20000000000, etc., augmentent de deux zéros à chaque transition d'une dixaine de la racine à une autre immédiatement supérieure, et ont la propriété immuable de former tous les quarrés possibles; c'est pourquoi, afin de trouver les quarrés de la racine qui descend de dixaine en dixaine vers ceux de ses unités, nous avons aisément compris que la même manière devait être prise en raison inverse, c'est-à-dire qu'il fallait employer les séries descendantes dont les différences entre leurs termes respectifs sont 20000000000, 200000000, 2000000, 20000, 200, 2, qui diminuent de deux zéros à chaque transition d'une dixaine de la racine à une autre immédiatement inférieure, et ont également la propriété immuable de former tous les quarrés possibles.

La méthode de former les quarrés de la racine qui se rapproche de dixaine en dixaine vers ceux de ses unités

nous servira à trouver la racine quarrée d'un nombre quelconque.

Mais, pour bien saisir et approfondir les principes concernant l'extraction des racines quarrées de divers nombres, il est à propos de donner une notion claire et précise de la formation des deuxièmes puissances de la racine qui s'élève de dixaine en dixaine vers l'infini, ou qui descend de dixaine en dixaine vers ses unités.

1°. Les quarrés 1, 4, 9, 16, 25, 36, etc., etc., qui ont pour racines 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., etc., sont formés jusqu'à l'infini par l'addition successive des termes de la progression arithmétique croissante 1, 3, 5, 7, 9, 11, etc., etc., qui diffèrent constamment entre eux de 2.

2°. Les quarrés 100, 400, 900, 1600, 2500, 3600, etc., qui ont pour racines 10, 20, 30, 40, 50, 60, etc., etc., sont formés par l'addition successive des termes de la progression arithmétique croissante 100, 300, 500, 700, 900, 1100, etc., etc., qui diffèrent constamment entre eux de 200.

3°. Les quarrés 10000, 40000, 90000, 160000, 250000, 360000, etc., etc., qui ont pour racines 100, 200, 300, 400, 500, 600, etc., etc., sont formés par l'addition successive des termes de la progression arithmétique croissante 10000, 30000, 50000, 70000, 90000, 110000, etc., etc., qui diffèrent constamment entre eux de 20000.

4°. Les quarrés 1000000, 4000000, 9000000, 16000000, 25000000, 36000000, etc., etc., qui ont pour racines 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, etc., etc., sont formés par l'addition successive des termes de la progression arithmétique croissante 1000000, 3000000, 5000000, 7000000, 9000000, 11000000, etc., etc., qui diffèrent constamment entre eux de 2000000.

5°. Les quarrés 100000000, 400000000, 900000000, 1600000000, 2500000000, 3600000000, etc., etc., qui ont pour racines 10000, 20000, 30000, 40000, 50000,

60000, etc., etc., sont formés par l'addition successive de termes de la progression arithmétique croissante 100000000 300000000, 500000000, 700000000, 900000000, ... 1100000000, etc., etc., qui diffèrent constamment entre eux de 200000000.

6°. Les quarrés 10000000000, 40000000000, 90000000000, 160000000000, 250000000000, 360000000000, etc., etc., qui ont pour racines 100000, 200000, 300000, 400000, 500000, 600000, etc., etc., sont formés par l'addition successive des termes de la progression arithmétique croissante 100000000000, 300000000000, 500000000000, 700000000000, 900000000000, 1100000000000, etc., etc., qui diffèrent constamment entre eux de 200000000000.

7°. Les quarrés 1000000000000, 4000000000000, ... 9000000000000, 16000000000000, 25000000000000, ... 36000000000000, etc., etc., qui ont pour racines 1000000, 2000000, 3000000, 4000000, 5000000, 6000000, etc., etc., sont formés par l'addition successive des termes de la progression arithmétique croissante 1000000000000, 3000000000000, 5000000000000, 7000000000000, 9000000000000, ... 11000000000000, qui diffèrent constamment entre eux de 2000000000000.

8°. Les quarrés 100000000000000, 400000000000000, 900000000000000, 1600000000000000, 2500000000000000, 3600000000000000, etc., etc., qui ont pour racines 10000000, 20000000, 30000000, 40000000, 50000000, 60000000, etc., sont formés par l'addition successive des termes de la progression arithmétique croissante 100000000000000, ... 300000000000000, 500000000000000, 700000000000000, 900000000000000, 1100000000000000, qui diffèrent constamment entre eux de 200000000000000.

Nous remarquons que, quand les racines quarrées augmentent d'un zéro, les quarrés et les termes des progressions arithmétiques croissantes augmentent les uns et les autres de deux zéros; que, quand les racines quarrées dimi-

nuent au contraire d'un zéro, les quarrés et les termes des progressions arithmétiques diminuent les uns et les autres de deux zéros, qui sont remplacés par autant de chiffres exprimant une valeur quelconque.

Les huit numéros précédens et les huit numéros suivans confirment ces vérités.

Toutes ces progressions arithmétiques sont des séries semblables, en ce qu'elles ont proportionnellement la même différence, et produisent les mêmes résultats, puisque, étant multipliées d'après nos principes, elles forment tous les quarrés des plus grands nombres. En effet, la multiplication de la somme des premier et dernier termes de chaque nombre de ceux de la série propre à former chaque quarré, par la moitié de la racine correspondante au dernier terme, produit précisément le quarré cherché. Mais nous avons obtenu, par une opération bien plus simple et bien plus aisée, le quarré de deux milliards, en additionnant successivement les termes de chaque série convenable à trouver les quarrés de chaque racine ascendante de dixaine en dixaine.

Dès que les termes des séries ascendantes, additionnés successivement, produisent les quarrés des racines ascendantes de dixaine en dixaine vers les grands nombres, et même vers l'infini; de là il résulte évidemment que les termes des séries descendantes, additionnés successivement, produisent les quarrés des racines descendantes de dixaine en dixaine vers leurs unités, et sont très propres à faire trouver l'extraction des racines quarrées de divers nombres.

Comme nous avons donné une idée des séries ascendantes, nous allons donner celle des séries descendantes, qui sont les progressions arithmétiques décroissantes, calculées pour former les quarrés de la racine qui descend de dixaine en dixaine vers ses unités.

1°. Les quarrés 100000000000000, 400000000000000, 900000000000000, 1600000000000000, 2500000000000000,

360000000000000, etc., etc., qui ont pour racines 10000000, 20000000, 30000000, 40000000, 50000000, 60000000, etc., sont formés par l'addition successive des termes de la progression arithmétique croissante 100000000000000, ... 300000000000000, 500000000000000, 700000000000000, 900000000000000, 1100000000000000, etc., etc., qui diffèrent constamment entre eux de 200000000000000.

2°. Les quarrés 1000000000000, 4000000000000, ... 9000000000000, 16000000000000, 25000000000000, ... 36000000000000, etc., etc., qui ont pour racines 1000000, 2000000, 3000000, 4000000, 5000000, 6000000, etc., etc., sont formés par l'addition successive des termes de la progression arithmétique croissante 1000000000000, 3000000000000, 5000000000000, 7000000000000, 9000000000000, ... 11000000000000, etc., etc., qui diffèrent constamment entre eux de 2000000000000.

3°. Les quarrés 10000000000, 40000000000, 90000000000, 160000000000, 250000000000, 360000000000, etc., etc., qui ont pour racines 100000, 200000, 300000, 400000, 500000, 600000, etc., etc., sont formés par l'addition successive des termes de la progression arithmétique croissante 100000000000, 300000000000, 500000000000, 700000000000, 900000000000, 1100000000000, etc., etc., qui diffèrent constamment entre eux de 200000000000.

4°. Les quarrés 100000000, 400000000, 900000000, 1600000000, 2500000000, 3600000000, etc., etc., qui ont pour racines 10000, 20000, 30000, 40000, 50000, 60000, etc., etc., sont formés par l'addition successive des termes de la progression arithmétique croissante 100000000, 300000000, 500000000, 700000000, 900000000, ... 1100000000, etc., etc., qui diffèrent constamment entre eux de 200000000.

5°. Les quarrés 1000000, 4000000, 9000000, 16000000, 25000000, 36000000, etc., etc., qui ont pour racines 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, etc., etc., sont formés par

l'addition successive des termes de la progression arithmétique croissante 1000000, 3000000, 5000000, 7000000, 9000000, 11000000, etc., etc., qui diffèrent constamment entre eux de 2000000.

6°. Les quarrés 10000, 40000, 90000, 160000, 250000, 360000, etc., etc., qui ont pour racines 100, 200, 300, 400, 500, 600, etc., etc., sont formés par l'addition succesive des termes de la progression arithmétique croissante 10000, 30000, 50000, 70000, 90000, 110000, etc., etc., qui diffèrent constamment entre eux de 20000.

7°. Les quarrés 100, 400, 900, 1600, 2500, 3600, etc., etc., qui ont pour racines 10, 20, 30, 40, 50, 60, etc., etc., sont formés par l'addition successive des termes de la progression arithmétique croissante 100, 300, 500, 700, 900, 1100, etc., etc., qui diffèrent constamment entre eux de 200.

8°. Les quarrés 1, 4, 9, 16, 25, 36, etc., etc., qui ont pour racines 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., etc., sont formés par l'addition successive des termes de la progression arithmétique croissante 1, 3, 5, 7, 9, 11, etc., etc., qui diffèrent constamment entre eux de 2.

Nous observons que, lors de la transition des cent millions de la racine aux dix millions, des dix millions aux millions, des millions aux cent mille, des cent mille aux dix mille, des dix mille aux mille, des mille aux centaines, des centaines aux dixaines, des dixaines aux unités, nous nous servons des séries descendantes; mais, après chacune de ces diverses transitions, nous employons les séries ascendantes pour trouver les quarrés de la racine qui augmente de dix millions en dix millions, de million en million, de cent mille en cent mille, de dix mille en dix mille, de mille en mille, de centaine en centaine, de dixaine en dixaine, d'unité en unité. C'est en calculant ainsi que nous avons obtenu le quarré d'un milliard, lequel, ajouté à celui de deux milliards que nous avons eu en formant les quarrés des racines

croissantes de dixaine en dixaine, forme le quarré de trois milliards, vu à la fin du tableau premier.

Cette observation des séries descendantes et ascendantes est applicable à l'extraction de la racine quarrée d'un nombre, quelque grand qu'il soit. Pour trouver de cette manière la racine quarrée d'un nombre donné, laquelle doit avoir un ou plusieurs zéros, nous nous servons des séries descendantes qui ont le double de zéros que la racine quarrée correspondante, et qui diminuent de deux zéros à chaque transition d'une dixaine de la racine à une autre immédiatement inférieure, et dont chaque terme est le double de chaque racine correspondante moins un, et de plus a le double de zéros de cette même racine, pour former chaque quarré.

Les chiffres des quarrés et de leurs racines diminuent de leur valeur en allant de gauche à droite, en raison sous-décuple et proportionnellement à leur décroissance, et, au contraire, ils augmentent de leur valeur en allant de droite à gauche, en raison décuple et proportionnellement à leur croissance. Ainsi, les chiffres des quarrés et de leurs racines, à mesure qu'ils se forment, augmentent en raison décuple.

Dans l'extraction des racines quarrées des nombres quelconques, soit qu'ils soient des quarrés parfaits, soit qu'ils soient des quarrés imparfaits, nous suivrons l'ordre naturel de la formation des quarrés, c'est-à-dire nous opérerons sur les chiffres qui ont une plus grande valeur, et ensuite nous descendrons de dixaine en dixaine vers les unités, où nous terminerons ce calcul.

Mais, afin de faire cette opération, il est utile de savoir qu'un nombre exprimé par plus de deux chiffres en a nécessairement deux à la racine quarrée, et qu'un nombre exprimé par deux chiffres en a seulement un; car 100, qui est le plus petit des nombres exprimés par trois chiffres, a pour racine 10, exprimé par deux caractères, et 99, qui est le plus grand des nombres exprimés par deux chiffres, a pour

racine 9, exprimé par un seul caractère, et le reste 18, moindre que 19, le terme de la série correspondant à la racine 10, lequel, additionné avec 81, le quarré précédent, compose 100, le quarré suivant. Cette vérité sensible et importante suffit pour nous prouver qu'un nombre dont on cherche la racine quarrée doit être divisé par tranches de deux chiffres en deux chiffres, et que sa racine quarrée doit avoir autant de chiffres qu'il a de tranches.

Comme nous devons commencer à opérer sur les chiffres à gauche qui ont le plus de valeur, continuer l'opération sur les autres qui suivent immédiatement, et enfin la finir sur les unités qui sont à droite, nous divisons de droite à gauche le nombre donné par tranches de deux chiffres en deux chiffres, en observant néanmoins que la tranche qui est à gauche peut n'en avoir qu'un; ensuite, nous cherchons la racine du quarré de la tranche le plus à gauche, nous mettons à la suite du chiffre qui l'exprime autant de zéros qu'il reste de tranches sur lesquelles nous devons opérer, et, à la suite du chiffre ou des chiffres qui expriment le quarré, deux fois autant de zéros que ceux de sa racine, ou, ce qui est la même chose, autant de zéros que les tranches suivantes ont de chiffres. Nous doublons cette racine accompagnée de ses zéros; nous ôtons de cette racine doublée une unité: alors nous avons la racine quarrée de la tranche le plus à gauche, son quarré et le terme correspondant de la progression génératrice tout composé de 9, excepté le chiffre le plus à gauche.

Or, si nous voulons continuer nos opérations pour avoir la racine du plus grand quarré d'un nombre donné, nous nous servirons des séries descendantes que nous trouvons en supprimant du terme de la progression génératrice autant de 9 que la racine suivante a de zéros, et en les remplaçant par le double de zéros, à l'effet d'obtenir le terme de la série descendante qui nous est nécessaire pour opérer, et que nous faisons correspondre à la première racine et à

son quarré. Nous augmentons de deux unités le chiffre du terme de la série placé devant les zéros, et nous additionnons ce terme ainsi augmenté et le premier quarré. La somme sera le quarré de la racine suivante. Nous faisons ces deux dernières opérations jusqu'à ce que nous ayons trouvé la racine du plus grand quarré des deux premières tranches.

Afin de trouver la racine du plus grand quarré des trois premières tranches, il faut passer d'une dixaine de la racine à une autre immédiatement inférieure, et obtenir la série inférieure à la précédente. Or, pour faire cette transition, nous diminuerons le dernier terme de la progression génératrice ou série de deux zéros, que nous remplaçons par un 9, et ainsi nous aurons le terme de la série inférieure à la précédente, lequel terme correspondra, malgré ce changement, au dernier quarré et à sa racine, puis nous augmentons de deux unités le chiffre de ce terme placé devant les zéros, et enfin nous additionnons ce terme ainsi augmenté avec le dernier quarré, pour avoir la somme qui sera le quarré de la racine suivante. Nous répétons ces deux dernières opérations jusqu'à ce que nous ayons trouvé la racine du plus grand quarré des trois premières tranches. Cette méthode, ci-dessus expliquée, nous servira à trouver celle des quatre premières tranches, des cinq premières tranches, etc., et du nombre entier. Les exemples suivans rendront sensibles et confirmeront ces vérités mathématiques.

Puisque nous passons successivement des dixaines de la racine à ses dixaines qui suivent d'une manière immédiate, ainsi que nous l'avons fait dans les huit articles de la section troisième, concernant le retour et rapprochement des dixaines de la racine depuis 2000000000 vers les quarrés de ses unités, nous descendrons des milliards aux cent millions, des cent millions aux dix millions, des dix millions aux millions, des millions aux cent mille, des cent mille

aux dix mille, des dix mille aux mille, des mille aux centaines, des centaines aux dixaines, des dixaines aux unités. Après chacune de ces transitions, nous trouverons les quarrés de la racine qui augmente de cent millions en cent millions, de dix millions en dix millions, de million en million, de cent mille en cent mille, de dix mille en dix mille, de mille en mille, de centaine en centaine, de dixaine en dixaine, d'unité en unité.

EXEMPLE I^er^.

r, 63, 84, 96, 30, 21.

Nous partageons le nombre 1638496302 1, dont nous voulons extraire la racine quarrée, en six tranches. Les six tranches de ce nombre nous montrent clairement que sa racine quarrée doit avoir six chiffres, qui exprimeront des cent mille, des dix mille, des mille, des centaines, des dixaines et des unités.

Nous extrayons 1, la racine quarrée de 1, la tranche le plus à gauche; nous mettons à la suite de 1, la racine quarrée, cinq zéros égalant les cinq tranches qui sont à calculer, pour avoir 100000, et à la suite de 1, son quarré, dix zéros, pour avoir 10000000000; en sorte que 100000 est la racine quarrée de 10000000000.

Pour trouver la racine quarrée de 1630000000, les deux premières tranches, nous passons des cent mille de la racine à ses dix mille, et puis nous obtenons les quarrés de la racine qui augmente de dix mille en dix mille. Afin d'avoir ce double résultat, 1°. nous ôtons de la racine doublée 200000 une unité, pour avoir 199999, le terme de la série, duquel nous supprimons autant de 9 que 110000, la racine suivante, a de zéros, et que nous remplaçons par le double de zéros, pour avoir 1900000000, le terme que nous faisons correspondre à la racine 100000 et à son quarré. 2°. Nous ajoutons deux unités au chiffre 9 du terme de la

série placé devant les huit zéros; nous avons 2100000000, autre terme de la même série, lequel nous additionnons avec le quarré 10000000000, pour avoir 12100000000, quarré de 110000. 3°. Nous ajoutons deux unités au chiffre 1 du terme de la série placé devant les huit zéros; nous avons 2300000000, autre terme de la même série, que nous additionnons avec le quarré 12100000000, pour avoir 14400000000, quarré de 120000, le plus approchant de 16300000000, les deux premières tranches, puisque..... 16900000000, quarré de 130000, les dépasse.

Pour trouver la racine du plus grand quarré de..... 16384000000, les trois premières tranches, il faut passer des dix mille de la racine à ses mille, et puis obtenir les quarrés de la racine qui augmente de mille en mille. Or, pour faire cette double opération, nous supprimons deux zéros de 2300000000, terme de la série, que nous remplaçons par un 9; nous avons 23900000000, terme de la série inférieure, que nous faisons correspondre à 120000 et à son quarré; nous ajoutons deux unités au chiffre 9 de ce dernier terme placé devant les six zéros, pour avoir 24100000000, terme que nous additionnons avec 14400000000, quarré de 120000. La somme est 14641000000, quarré de 121000. A chaque addition, nous ajoutons deux unités au chiffre du dernier terme de la même série placé devant les six zéros; nous additionnons ce terme ainsi augmenté avec le quarré précédent. La somme sera toujours le quarré de la racine suivante. C'est de cette manière que nous sommes parvenus à trouver 16384000000, quarré de 128000, qui égale les trois premières tranches.

Pour trouver la racine du quarré le plus approchant de 16384960000, les quatre premières tranches; nous passons des mille de la racine à ses centaines, et puis nous obtenons les quarrés de cette même racine, qui augmente de centaine en centaine. Or, pour avoir ce double résultat, nous supprimons deux zéros du terme de la série 25500000000, qui cor-

respond à la racine 128000 et à son quarré, qui égale le double moins un de la même racine 128, qui exprime une valeur, et a le double de zéros qu'elle ; nous les remplaçons par le chiffre 9, pour avoir 25590000, le terme de la série inférieure, que nous faisons correspondre à la racine 128000 et à son quarré ; nous ajoutons deux unités au chiffre 9 du terme 25590000, placé devant les quatre zéros, pour avoir 25610000, terme correspondant à 128100, la racine quarrée, lequel, étant additionné avec 16384000000, dernier quarré, donne la somme 16409610000, quarré de 128100, qui excède 16384960000, les quatre premières tranches. De là il résulte que 16384000000, qui a pour racine 128000, et pour terme correspondant 25590000 de la série, en est le quarré le plus approchant.

Pour trouver la racine du quarré le plus approchant de 16384963000, les cinq premières tranches, nous passons des centaines de la racine à ses dixaines, et nous cherchons les quarrés de cette même racine, qui augmente de dixaine en dixaine. Or, pour faire cette double opération, nous supprimons deux zéros de 25590000, terme de la dernière série ; nous les remplaçons par le chiffre 9, pour avoir 2559900, terme de la série inférieure, que nous faisons correspondre à la racine 128000 et à son quarré ; nous ajoutons deux unités au chiffre 9 de ce dernier terme placé devant les deux zéros, pour avoir 2560100, le terme suivant de la même série correspondant à 128010, la racine ; nous additionnons ce terme et le quarré 16384000000, pour avoir la somme 16386560100, quarré de 128010, qui excède les cinq premières tranches. De là il résulte que 16384000000, qui a pour racine 128000, et pour terme correspondant de la série 2559900, est encore le quarré le plus approchant de 16384963000, les cinq premières tranches.

Nous terminons l'extraction de la racine quarrée du nombre entier 16384963021 en passant des dixaines de la racine à ses unités, et en trouvant les quarrés de la ra-

cine qui augmente d'unité en unité. Or, pour faire cette double opération, nous supprimons les deux derniers zéros de 2559900, le terme de la série; nous les remplaçons par le chiffre 9, pour avoir 255999, que nous faisons correspondre à la racine 128000 et à son quarré; nous ajoutons deux unités au dernier 9 de ce terme, pour avoir 256001, le terme que nous faisons correspondre à la racine 128001, dont nous obtenons aisément le quarré en additionnant le terme 256001 et le quarré 16384000000. Effectivement, la somme 16384256001 est le quarré de 128001. Nous additionnons 256003, terme augmenté de deux unités, et...: 16384256001, dernier quarré, pour avoir 16384512004, quarré de 128002. Nous additionnons 256005, terme augmenté de deux unités, et 16384512004, dernier quarré, pour avoir 16384847680 09, quarré de 128003, le plus approchant du nombre entier 16384963021, puisque..... 16385024016, quarré de 128004, l'excède. Donc 128003 est la racine quarrée de 16384963021.

TABLEAU DE L'EXEMPLE 1^er^.

1, 63, 84, 96, 30, 21.

Racines.	Quarrés.	Progression générat.
100000	10000000000	1900000000
110000	12100000000	2100000000
120000	14400000000	2300000000
130000	16900000000	2500000000

14400000000, quarré de 120000, est le plus près de 16300000000, les deux premières tranches, puisque 16900000000, quarré de 130000, les excède.

Transition des dix mille de la racine aux mille.

Racines.	Quarrés.	Progression génerat.
120000	14400000000	239000000
121000	14641000000	241000000
122000	14884000000	243000000
123000	15129000000	245000000
124000	15376000000	247000000
125000	15625000000	249000000
126000	15876000000	251000000
127000	16129000000	253000000
128000	16384000000	255000000

16384000000, quarré de 128000, égale les trois premières tranches.

Transition des mille de la racine aux centaines.

Racines.	Quarrés.	Progression génerat.
128000	16384000000	25590000
128100	16409610000	25610000

16384000000, quarré de 128000, est le plus près de 16384960000, les quatre premières tranches, puisque 16409610000, quarré de 128100, les excède.

Transition des centaines de la racine aux dixaines.

Racines.	Quarrés.	Progression génerat.
128000	16384000000	2559900
128010	16386560100	2560100

16384000000, quarré de 128000, est le plus près de 16384963000, les cinq premières tranches, puisque 16386560100, quarré de 128010, les excède.

Transition des dixaines de la racine aux unités.

Racines.	Quarrés.	Progression génerat.
128000	16384000000	255999
128001	16384256001	256001
128002	16384512004	256003
128003	16384768009	256005
128004	16385024016	256007

16384768009, quarré de 128003, est le plus approchant de 16384963021, nombre entier, puisque.... 16385024016, quarré de 128004, l'excède.

Ce que nous avons dit précédemment sur l'extraction de la racine quarrée d'un nombre donné quelconque se réduit, 1°. à partager de droite à gauche le nombre par tranches de deux chiffres en deux chiffres, en observant que la tranche le plus à gauche peut n'en avoir qu'un, et en observant aussi que la quantité numérique des tranches indique celle des chiffres de la racine; 2°. à extraire la racine quarrée de la tranche le plus à gauche, après laquelle on met autant de zéros qu'il reste de tranches à calculer, et après son quarré le double de ceux de la racine, afin d'observer le rapport d'un à deux, ainsi que le demande ce calcul; 3°. à ôter une unité de la racine doublée, pour avoir le terme de la progression génératrice ou série, duquel nous supprimons autant de 9 que la racine qui vient après celle que nous avons trouvée a de zéros, et que nous remplaçons par le double de zéros, afin de former exactement les quarrés des racines qui se succèdent sans interruption; 4°. à augmenter de deux unités, à chaque addition, le chiffre du terme de la série placé devant les zéros, et même le dernier chiffre du terme de la première

série, quand il s'agit de chercher les quarrés de la racine qui croît d'unité en unité, et puis à additionner ce terme ainsi augmenté et le quarré précédent, pour avoir la somme qui est précisément le quarré de la racine suivante. Enfin, on opère de cette manière jusqu'à ce qu'on ait trouvé la racine du plus grand quarré, soit des deux, des trois, des quatre, etc., premières tranches, soit du nombre entier, et l'on supprime, à chaque transition d'une dixaine de la racine à une autre immédiatement inférieure, les deux zéros du terme de la série, que nous remplaçons par un 9, à l'effet de descendre d'une série à une autre. Tels sont les principes que nous avons déjà employés dans le premier exemple, et que nous emploierons dans l'exemple suivant, pour l'extraction de la racine quarrée.

TABLEAU DE L'EXEMPLE II.

8, 45, 03, 96, 17, 29, 87.

Racines.	Quarrés.	Progression génerat.
2000000	4000000000000	390000000000
2100000	4410000000000	410000000000
2200000	4840000000000	430000000000
2300000	5290000000000	450000000000
2400000	5760000000000	470000000000
2500000	6250000000000	490000000000
2600000	6760000000000	510000000000
2700000	7290000000000	530000000000
2800000	7840000000000	550000000000
2900000	8410000000000	570000000000
3000000	9000000000000	590000000000

8410000000000, quarré de 2900000, est le plus près de 8450000000000, les deux premières tranches, puisque 9000000000000, quarré de 3000000, les excède.

Transition des cent mille de la racine aux dix mille.

Racines.	Quarrés.	Progression génerat.
2900000	8410000000000	57900000000
2910000	8468100000000	58100000000

8410000000000, quarré de 2900000, est le plus près de 8450300000000, les trois premières tranches, puisque 8468100000000, quarré de 2910000, les excède.

Transition des dix mille de la racine aux mille.

Racines.	Quarrés.	Progression génerat.
2900000	8410000000000	5799000000
2901000	8415801000000	5801000000
2902000	8421604000000	5803000000
2903000	8427409000000	5805000000
2904000	8433216000000	5807000000
2905000	8439025000000	5809000000
2906000	8444836000000	5811000000
2907000	8450649000000	5813000000

8444836000000, quarré de 2906000, est le plus près de 8450396000000, les quatre premières tranches, puisque 8450649000000, quarré de 2907000, les excède.

Transition des mille de la racine aux centaines.

Racines.	Quarrés.	Progression génerat.
2906000	8444836000000	581190000
2906100	8445417210000	581210000
2906200	8445998440000	581230000

Racines.	Quarrés.	Progression génerat.
2906300	844657960000	581250000
2906400	844716096000	581270000
2906500	844774225000	581290000
2906600	844832356000	581310000
2906700	844890489000	581330000
2906800	844948624000	581350000
2906900	845006761000	581370000
2907000	845064900000	581390000

845006761000, quarré de 2906900, est le plus près de 845039617000, les cinq premières tranches, puisque 845064900000, quarré de 2907000, les excède.

Transition des centaines de la racine aux dixaines.

Racines.	Quarrés.	Progression génerat.
2906900	845006761000	5813700
2906910	845012574810	5813810
2906920	845018388640	5813830
2906930	845024202490	5813850
2906940	845030016360	5813870
2906950	845035830250	5813890
2906960	845041644160	5813910

845035830250, quarré de 2906950, est le plus près de 845039617290, les six premières tranches, puisque 845041644160, quarré de 2906960, les excède.

Transition des dixaines de la racine aux unités.

Racines.	Quarrés.	Progression génerat.
2906950	845035830250	5813899
2906951	845036411640 1	5813901

Racines.	Quarrés.	Progression génerat.
2906952	845036993o304	5813903
2906953	845037574420 9	5813905
2906954	845038155811 6	5813907
2906955	845038737202 5	5813909
2906956	845039318593 6	5813911
2906957	845039899984 9	5813913

845039318593 6, quarré de 2906956, est le plus approchant du nombre 845039617298 7, puisque..... 845039899984 9, quarré de 2906957, excède ce même nombre. Donc 2906956 est la racine quarrée la plus approchante de 845039617298 7.

DEUXIÈME SECTION.

Seconde méthode d'extraire la racine quarrée.

Dans la première section du chapitre deuxième, concernant l'extraction de la racine quarrée, nous avons partagé, de droite à gauche, le nombre à extraire par tranches de deux chiffres en deux chiffres, en sorte que la tranche la plus à gauche peut n'avoir qu'un seul chiffre. Nous avons opéré sur les tranches, en allant de gauche à droite, de la manière suivante: 1°. sur la tranche le plus à gauche; 2°. sur les deux premières tranches; 3°. sur les trois premières tranches; 4°. sur les quatre premières tranches, etc., et enfin sur le nombre entier. C'est pourquoi, et en suivant ce même ordre, nous les nommons *première*, *deuxième*, *troisième*, *quatrième*, etc., *tranches*. Cette division faite, et ses parties connues sous ses diverses dénominations, nous ne supprimerons pas, dans cette deuxième section, autant de 9 du terme de la progression génératrice que la racine

suivante a de zéros, pour les remplacer par le double de zéros, et pour employer, par cette transformation, les séries descendantes mentionnées dans la première section de ce chapitre. Désormais, afin de diminuer le nombre des chiffres dans nos calculs sur l'extraction de la racine quarrée, nous nous servirons de la série primitive, à laquelle nous coordonnerons toutes nos opérations, qui alors seront bien plus simples, pour extraire la racine quarrée d'un nombre donné, laquelle doit avoir nécessairement autant de chiffres que le nombre a de tranches.

Or, pour trouver, sans nous servir d'autres séries que de la primitive 1, 3, 5, 7, 9, 11, etc., etc., la racine du plus grand quarré d'un nombre donné, nous commençons à extraire la racine quarrée de la tranche le plus à gauche, ensuite, nous cherchons le second chiffre de la racine qui doit provenir des deux premières tranches sur lesquelles nous devons opérer. Pour connaître ce second chiffre, 1°. nous mettons un zéro à la suite de la racine extraite de la première tranche, et deux zéros à la suite de son quarré, afin d'observer le rapport d'un à deux, nécessité par ce calcul; 2°. nous prenons le double de cette racine, duquel nous ôtons un, pour avoir le terme de la progression génératrice ou série, lequel nous faisons correspondre à la racine extraite de la première tranche et suivie d'un zéro, et à son quarré; 3°. nous plaçons sur la même ligne cette racine, son quarré et le terme de la progression génératrice ou série, laquelle a la propriété immuable de former, par la simple règle de l'addition, tous les quarrés possibles; 4°. nous additionnons le dernier quarré, suivi de ses deux zéros, et le terme de la progression génératrice augmenté de deux unités, pour avoir le quarré de la racine qui suit immédiatement; 5°. nous additionnons ainsi jusqu'à ce que nous ayons obtenu la racine du plus grand quarré des deux premières tranches.

Pour connaître le troisième chiffre de la racine qui doit

provenir des trois premières tranches sur lesquelles nous devons opérer, 1°. nous mettons un zéro à la suite de la racine extraite des deux premières tranches, et deux zéros à la suite de son quarré; 2°. nous prenons le double de la racine résultante des deux premières tranches et suivie d'un zéro, duquel nous ôtons un, pour avoir le terme de la progression génératrice, lequel nous faisons correspondre à la racine extraite des deux premières tranches et suivie d'un zéro, et à son quarré; 3°. nous plaçons sur la même ligne cette racine, son quarré et le terme de la progression génératrice; 4°. nous additionnons le dernier quarré suivi de ses deux zéros, et le terme de la progression génératrice augmenté de deux unités, pour avoir le quarré de la racine qui suit immédiatement; 5°. nous additionnons ainsi jusqu'à ce que nous ayons obtenu la racine du plus grand quarré des trois premières tranches.

Pour connaître le quatrième chiffre de la racine qui doit provenir des quatre premières tranches sur lesquelles nous devons opérer, 1°. nous mettons un zéro à la suite de la racine extraite des trois premières tranches, et deux zéros à la suite de son quarré; 2°. nous prenons le double de la racine résultante des trois premières tranches, et suivie d'un zéro, duquel nous ôtons un, pour avoir le terme de la progression génératrice, lequel nous faisons correspondre à la racine extraite des trois premières tranches et suivie d'un zéro, et à son quarré; 3°. nous plaçons sur la même ligne cette racine, son quarré et le terme de la progression génératrice; 4°. nous additionnons le dernier quarré suivi de ses deux zéros, et le terme de la progression génératrice augmenté de deux unités, pour avoir le quarré de la racine qui suit immédiatement; 5°. nous additionnons ainsi jusqu'à ce que nous ayons obtenu la racine du plus grand quarré des quatre premières tranches.

Nous opérons de cette manière sur les autres tranches du nombre, comme sur les précédentes. Si cette méthode, qui

nous fait aisément trouver les racines de tous les quarrés possibles, nous paraît plus facile que la première, expliquée dans la première section du chapitre deuxième, elle doit paraître aussi plus expéditive, à cause de la diminution des chiffres. Les exemples suivans prouveront ces vérités.

EXEMPLE III.

6, 89, 73, 04, 15, 29.

La racine quarrée du nombre 689730415 29, partagé en six tranches, aura six chiffres, qui, considérés de gauche à droite, valent des cent mille, des dix mille, des mille, des centaines, des dixaines et des unités.

2 est la racine de 4, le plus grand quarré de 6, la tranche le plus à gauche, qui est la première.

Pour connaître le deuxième chiffre de la racine qui doit provenir de 689, les deux premières tranches sur lesquelles nous devons opérer, 1°. nous mettons un zéro à la suite de 2, la racine, et deux zéros à la suite de 4, son quarré, en sorte que 20 est la racine quarrée de 400; 2°. nous prenons le double de 20, la racine, duquel nous ôtons un, pour avoir 39, le terme de la progression génératrice, lequel nous faisons correspondre à la racine 20 et à son quarré 400; 3°. nous plaçons sur la même ligne 20, cette racine, 400, son quarré, et 39, le terme de la progression génératrice; 4°. nous additionnons 400, le dernier quarré, et 41, le terme de la progression génératrice augmenté de deux unités, pour avoir la somme 441, qui est le quarré de 21, la racine suivante; 5°. nous continuons l'opération en additionnant le dernier quarré et le terme de la progression génératrice augmenté de deux unités, jusqu'à ce qu'on ait obtenu 26, la racine de 676, le plus grand quarré contenu dans 689, les deux premières tranches, puisque 729, quarré de 27, les dépasse.

Pour connaître le troisième chiffre de la racine qui doit provenir de 68973, les trois premières tranches sur les-

quelles nous devons opérer, 1°. nous mettons un zéro à la suite de 26, la racine qui résulte des deux premières tranches, et deux zéros à la suite de 676, son quarré, en sorte que 260 est la racine quarrée de 67600; 2°. nous prenons le double de 260, la racine, duquel nous ôtons un, pour avoir 519, le terme de la progression génératrice, lequel nous faisons correspondre à la racine 260 et à son quarré 67600; 3°. nous plaçons sur la même ligne 260, cette racine, 67600, son quarré, et 519, le terme de la progression génératrice; 4°. nous additionnons 67600, le dernier quarré, et 521, le terme de la progression génératrice augmenté de deux unités, pour avoir la somme 68121, le quarré de 261, la racine suivante; 5°. nous additionnons 68121, dernier quarré, et 523, le dernier terme augmenté de deux unités, pour avoir la somme 68644, quarré de 262, le plus approchant de 68973, les trois premières tranches, puisque 69169, quarré de 263, les dépasse.

Pour connaître le quatrième chiffre de la racine qui doit provenir de 6897304, les quatre premières tranches sur lesquelles nous devons opérer, 1°. nous mettons un zéro à la suite de 262, la racine qui résulte des trois premières tranches, et deux zéros à la suite de 68644, son quarré, en sorte que 2620 est la racine quarrée de 6864400; 2°. nous prenons le double de 2620, la racine, duquel nous ôtons un, pour avoir 5239, le terme de la progression génératrice, lequel nous faisons correspondre à la racine 2620 et à son quarré 6864400; 3°. nous plaçons sur la même ligne 2620, cette racine, 6864400, son quarré, et 5239, le terme de la progression génératrice; 4°. nous additionnons 6864400, le dernier quarré, et 5241, le dernier terme augmenté de deux unités, pour avoir la somme 6869641, quarré de 2621; 5°. nous continuons l'opération en additionnant le dernier quarré et le terme de la progression génératrice augmenté de deux unités, jusqu'à ce que nous ayons obtenu 6895876, quarré de 2626, le plus approchant de 6897304, les quatre premières tranches, puisque 6901129, quarré de 2627, les dépasse.

Pour connaître le cinquième chiffre de la racine qui doit provenir de 689730415, les cinq premières tranches sur lesquelles nous devons opérer, 1°. nous mettons un zéro à la suite de 2626, la racine qui résulte des quatre premières tranches, et deux zéros à la suite de 6895876, son quarré, en sorte que 26260 est la racine quarrée de 689587600; 2°. nous prenons le double de 26260, la racine, duquel nous ôtons un, pour avoir 52519, le terme de la progression génératrice, lequel nous faisons correspondre à la racine 26260 et à son quarré 689587600; 3°. nous plaçons sur la même ligne 26260, cette racine, 689587600, son quarré, et 52519, le terme de la progression génératrice; 4°. nous additionnons 689587600, dernier quarré, et 52521, le dernier terme augmenté de deux unités, pour avoir la somme 689640121, quarré de 26261; 5°. nous additionnons..... 689640121, quarré de 26261, et 52523, dernier terme augmenté de deux unités, pour avoir la somme 689692644, quarré de 26262, le plus approchant de 689730415, les cinq premières tranches, puisque 689745169, quarré de 26263, les dépasse.

Pour connaître le sixième chiffre de la racine qui doit provenir 689730415 29, nombre entier, sur lequel nous devons opérer, 1°. nous mettons un zéro à la suite de 26262, la racine qui résulte des cinq premières tranches, et deux zéros à la suite de 689692644, en sorte que 2626 20 est la racine quarrée de 689692644 00; 2°. nous prenons le double de 2626 20, la racine, duquel nous ôtons un, pour avoir 5252 39, le terme de la progression génératrice, lequel nous faisons correspondre à la racine 2626 20 et à son quarré 689692644 00; 3°. nous plaçons sur la même ligne 2626 20, la racine, 689692644 00, son quarré, et 5252 39, le terme de la progression génératrice; 4°. nous additionnons..... 689692644 00, quarré de 2626 20, et 5252 41, dernier terme augmenté de deux unités, pour avoir la somme 689697896 41, quarré de 2626 21; 5°. nous continuons l'opération en ad-

ditionnant le dernier quarré et le terme de la progressio
génératrice augmenté de deux unités, jusqu'à ce que nou
ayons obtenu 68972941129, quarré de 262627, le plus ap
prochant de 68973041529, nombre entier, puisque.....
68973466384, quarré de 262628, le dépasse. Donc 26262
est la racine quarrée de 68973041529.

TABLEAU DE L'EXEMPLE III.

6, 89, 73, 04, 15, 29.

Racines.	Quarrés.	Progression génerat.
20	400	39
21	441	41
22	484	43
23	529	45
24	576	47
25	625	49
26	676	51
27	729	53

676, quarré de 26, est le plus approchant de 689, les deux premières tranches, puisque 729, quarré de 27, les dépasse.

Transition des dix mille de la racine aux mille.

Racines.	Quarrés.	Progression génerat.
260	67600	519
261	68121	521
262	68644	523
263	69169	525

68644, quarré de 262, est le plus approchant de 68973, les trois premières tranches, puisque 69169, quarré de 263, les dépasse.

Transition des mille de la racine aux centaines.

Racines.	Quarrés.	Progression général.
2620	6864400	5239
2621	6869641	5241
2622	6874884	5243
2623	6880129	5245
2624	6885376	5247
2625	6890625	5249
2626	6895876	5251
2627	6901129	5253

6895876, quarré de 2626, est le plus approchant de 6897304, les quatre premières tranches, puisque.... 6901129, quarré de 2627, les dépasse.

Transition des centaines de la racine aux dixaines.

Racines.	Quarrés.	Progression général.
26260	689587600	52519
26261	689640121	52521
26262	689692644	52523
26263	689745169	52525

689692644, quarré de 26262, est le plus approchant de 689730415, les cinq premières tranches, puisque 689745169, quarré de 26263, les dépasse.

Transition des dixaines de la racine aux unités.

Racines.	Quarrés.	Progression général.
262620	68969264400	525239
262621	68969789641	525241
262622	68970314884	525243

Racines.	Quarrés.	Progression génerat.
262623	68970840129	525245
262624	68971365376	525247
262625	68971890625	525249
262626	68972415876	525251
262627	68972941129	525253
262628	68973466384	525255

68972941129, quarré de 262627, est le plus approchant du nombre 68973041529, puisque 68973466384, qui a pour racine 262628, est un quarré qui excède ce même nombre. Donc 262627 est la racine quarrée la plus approchante de 68973041529.

Comme il est indispensable de partager un nombre quelconque dont on cherche la racine quarrée par tranches de deux chiffres en deux chiffres, en sorte que la tranche le plus à gauche peut n'avoir qu'un seul chiffre; comme la racine quarrée du même nombre doit avoir autant de chiffres qu'il a de tranches; comme celle du plus grand quarré de la première tranche, des deux premières tranches, des trois premières tranches, des quatre premières tranches, etc., et même du nombre entier, prend successivement un chiffre, deux chiffres, trois chiffres, quatre chiffres, etc., est, à chaque chiffre qu'elle prend, dix fois plus grande; et, comme chaque chiffre pris peut être 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, alors on commence l'extraction de la racine quarrée des tranches, et même du nombre entier, en mettant un zéro à la suite de la dernière racine, et deux zéros à la suite de son quarré; ensuite, on cherche, après chaque transition, et suivant nos principes, qui sont simples et uniformes pour chacune, les quarrés de la racine qui augmente de cent mille en cent mille, de dix mille en dix mille, de mille en mille,

de centaine en centaine, de dixaine en dixaine, d'unité en unité, et l'on continue le calcul jusqu'à ce qu'on ait trouvé le chiffre de la racine du plus grand quarré de chacune des tranches, ou du nombre, qui ne peut jamais excéder 9.

Cette seconde méthode, dont les principes, conformes dans chaque transition d'une dixaine à une autre inférieure, ont été appliqués dans le troisième exemple, nous semble suffisamment développée et assez connue pour en faire sans peine l'application sur les exemples suivans.

Mais si cette méthode, aussi facile que sûre, de trouver la racine du plus grand quarré d'un nombre donné, paraît un peu longue, on peut l'abréger ainsi. Quand on présume que le chiffre suivant doit avoir plusieurs unités, alors on additionne un nombre suffisant de termes de la progression génératrice, lequel indique qu'il faut placer à la racine le même nombre d'unités; ensuite, on additionne la somme de tous ces termes et le dernier quarré, pour avoir le quarré le plus approchant des deux premières tranches, dont on connaît justement la racine. On opère ainsi à l'égard des trois premières, des quatre premières tranches, etc., et du nombre entier.

L'exemple IV suivant nous servira à faire bien comprendre cette abréviation de calcul.

9 est la racine de 81, le quarré le plus approchant de 99, la première tranche. Mais pour trouver brièvement la racine du plus grand quarré de 9990, les deux premières tranches, 1°. nous mettons un zéro à la suite de 9, la racine extraite de la première tranche, et deux zéros à la suite de 81, son quarré, en sorte que 90 est la racine quarrée de 8100, correspondans l'un et l'autre à 179, le terme de la progression génératrice; 2°. nous additionnons 181, 183, 185, 187, 189, 191, 193, 195, 197, neuf termes suivans de la même série, lesquels indiquent qu'on doit ajouter 9 à la racine 90, qui alors est 99; ensuite,

nous additionnons 1701, la somme des neuf termes, et 8100, quarré de 90, pour avoir 9801, le plus grand quarré de 9990, les deux premières tranches, dont la racine est 99, puisque 10000, quarré de 100, les dépasse.

Cette manière d'abréger le calcul sur l'extraction de la racine des deux premières tranches de l'exemple IV est facile à concevoir, et est applicable non-seulement aux autres tranches du même exemple, mais aussi à toutes les tranches de ceux qu'on voudra choisir. Ainsi, nous donnons de suite les exemples suivans, où l'on comprendra aisément ce mode d'abréviation.

TABLEAU DE L'EXEMPLE IV.

99, 90, 12, 78, 63, 57, 89.

Racines.	Quarrés.	Progression génerat.
90	8100	179
99	9801	1701
100	10000	199

8100, quarré de 90, et 1701, la somme des neuf termes suivans, 181, 183, 185, 187, 189, 191, 193, 195, 197, et indicateurs qu'on doit ajouter 9 à la racine 90, égalent la somme 9801, quarré de 99, le plus grand qui soit contenu dans 9990, les deux premières tranches, puisque 10000, quarré de 100, les dépasse.

Transition des cent mille de la racine aux dix mille.

Racines.	Quarrés.	Progression génerat.
990	980100	1979
999	998001	17901
1000	1000000	1999

980100, quarré de 990, et 17901, la somme des neuf

termes suivans, 1981, 1983, 1985, 1987, 1989, 1991, 1993, 1995, 1997, et indicateurs qu'on doit ajouter 9 à la racine 990, égalent celle de 998001, quarré de 999, le plus grand qui soit contenu dans 999012, les trois premières tranches, puisque 1000000, quarré de 1000, les dépasse.

Transition des dix mille de la racine aux mille.

Racines.	Quarrés.	Progression génerat.
9990	99800100	19979
9995	99900025	99925
9996	99920016	19991

99800100, quarré de 9990, et 99925, la somme des cinq termes suivans, 19981, 19983, 19985, 19987, 19989, qui indiquent qu'on doit ajouter 5 à la racine 9990, égalent celle de 99900025, quarré de 9995, le plus grand qui soit contenu dans 99901278, les quatre premières tranches, puisque 99920016, quarré de 9996, les dépasse.

Transition des mille de la racine aux centaines.

Racines.	Quarrés.	Progression génerat.
99950	9990002500	199899
99951	9990202401	199901

9990002500, quarré de 99950, est le plus grand qui soit contenu dans 9990127863, les cinq premières tranches, puisque 9990202401, quarré de 99951, les dépasse.

Transition des centaines de la racine aux dixaines.

Racines.	Quarrés.	Progression génerat.
999500	999000250000	1998999
999506	999012244036	11994036
999507	999014243049	1999013

999000250000, quarré de 999500, et 11994036, la somme des six termes suivans, 1999001, 1999003, 1999005, 1999007, 1999009, 1999011, qui indiquent qu'on doit ajouter 6 à la racine 999500, égalent celle de 999012244036, quarré de 999506, le plus grand qui soit contenu dans 999012786357, les six premières tranches, puisque 999014243049, quarré de 999507, les dépasse.

Transition des dixaines de la racine aux unités.

Racines.	Quarrés.	Progression génerat.
9995060	999012244036oo	19990119
9995061	999012443937 21	19990121
9995062	999012643838 44	19990123
9995063	999012843739 69	19990125

999012643838 44, quarré de 9995062, est le plus grand qui soit contenu dans le nombre entier... 999012786357 89, puisque 999012843739 69, quarré de 9995063, dépasse ce même nombre. Donc 9995062 est la racine quarrée la plus approchante de..... 999012786357 89

TROISIÈME SECTION.

Preuve d'un calcul exact sur l'extraction de la racine quarrée.

Comme la génération des quarrés des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., etc., provient de l'addition successive des termes de la progression arithmétique croissante 1, 3, 5, 7, 9, 11, etc., etc., laquelle nous appelons *progression génératrice des quarrés;* comme chaque quarré égale la somme de tous les termes dont le nombre est exprimé par la racine correspondante ; comme aussi chaque quarré égale le produit de sa racine multipliée par elle-même, c'est pourquoi la preuve qu'on a trouvé les racines des plus grands quarrés des nombres donnés, qui sont des quarrés parfaits ou imparfaits, résulte nécessairement de ce que la somme de tous les termes dont le nombre est exprimé par la racine correspondante à leur dernier terme égale le dernier quarré, lequel égale aussi le produit de sa racine multipliée par elle-même.

On trouve facilement la somme de tous les termes en multipliant la somme des extrêmes par la moitié du nombre des termes, ou la moitié de la somme des extrêmes par le nombre des termes. De là il est évident que, respectivement à chaque quarré, le produit de la racine multipliée par elle-même égale toujours la somme de tous les termes qui y sont contenus.

Ainsi les élémens résultans de la progression génératrice sont tellement simples, qu'ils nous font trouver aisément tous les quarrés possibles des nombres naturels, connaître les racines des plus grands quarrés des nombres donnés, puisque les racines des plus grands quarrés, multipliées par elles-mêmes, reproduisent ces mêmes quarrés.

Par conséquent, nous allons vérifier ainsi les nombres donnés dans les quatre exemples précédens, en observant néanmoins que, pour multiplier plus aisément et plus sûrement les racines quarrées par elles-mêmes, nous les additionnons successivement par les neuf chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

I. Nous disons que 16384768009 est le quarré parfait de 128003, puisque cette racine, multipliée par elle-même, reproduit ce quarré.

128003 × 128003		
		1 = 128003
		2 = 256006
	384009	3 = 384009
	000000	4 = 512012
	000000	5 = 640015
	1024024	6 = 768018
	256006	7 = 896021
	128003	8 = 1024024
		9 = 1152027.
	16384768009	

II. Nous disons que 8450393185936 est le quarré parfait de 2906956, puisque cette racine, multipliée par elle-même, reproduit ce quarré.

2906956 × 2906956	1 = 2906956
17441736	2 = 5813912
14534780	3 = 8720868
26162604	4 = 11627824
17441736	5 = 14534780
0000000	6 = 17441736
26162604	7 = 20348692
5813912	8 = 23255648
	9 = 26162604.
8450393185936.	

III. Nous disons que 68972941129 est le quarré parfait de 262627, puisque cette racine, multipliée par elle-même, reproduit ce quarré.

262627 × 262627	1 = 262627
1838389	2 = 525254
525254	3 = 787881
1575762	4 = 1050508
525254	5 = 1313135
1575762	6 = 1575762
525254	7 = 1838389
68972941129	8 =
	9 =

IV. Nous disons que 9990126438384 est le quarré parfait de 9995062, puisque cette racine, multipliée par elle-même, reproduit ce quarré.

9995062 × 9995062	1 = 9995062
19990124	2 = 19990124
59970372	3 = 29985186
0000000	4 = 39980248
4997531o	5 = 4997531o
89955558	6 = 59970372
89955558	7 = 69965434
89955558	8 = 79960496
99901264383844	9 = 89955558.

MÉTHODE

FACILE ET SURE

POUR FORMER LES CUBES

ET EXTRAIRE LEURS RACINES.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA FORMATION DES CUBES.

PREMIÈRE SECTION.

De la formation des cubes des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, etc., etc.

Lorsque nous voulûmes connaître le principe générateur des cubes, 1°. nous formâmes ceux des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, qui sont 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729; 2°. nous ôtames, en suivant l'ordre de leur formation, 1 de 8, dont la différence est 7; 8 de 27, dont la différence est 19; 27 de 64, dont la différence est 37; 64 de 125, dont la différence est 61; 125 de 216, dont la différence est 91; 216 de 343, dont la différence est 127; 343 de 512, dont la différence est 169; 512 de 729, dont la différence est 217; nous donnâmes 1 pour premier terme de toutes ces différences, et nous eûmes cette suite incalculable 1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217; 3°. comme cette suite,

dont la différence est variable entre tous ses termes, ne nous parut pas être le principe générateur des cubes, nous ôtâmes, en suivant le même ordre de soustraction que nous avons suivi à l'égard des cubes, 1 de 7, dont la différence est 6; 7 de 19, dont la différence est 12; 19 de 37, dont la différence est 18; 37 de 61, dont la différence est 24; 61 de 91, dont la différence est 30; 91 de 127, dont la différence est 36; 127 de 169, dont la différence est 42; 169 de 217, dont la différence est 48; nous donnâmes zéro pour premier terme de ces secondes différences, et nous eûmes cette progression arithmétique croissante 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, dont la différence 6 est constante entre tous ses termes, même continués jusqu'à l'infini. C'est une suite qu'on peut calculer, et qui a la propriété primordiale et invariable de former, par l'addition successive de ses termes, tous les cubes, même calculés jusqu'à l'infini; elle est donc la progression génératrice des cubes.

Pour la trouver, il nous a fallu chercher, 1°. les premières différences qui existent entre les cubes des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; 2°. les secondes différences qui existent entre les premières, et qui sont les termes de la progression génératrice des cubes.

Cette décomposition des cubes, faite de la manière ci-dessus expliquée, nous a fait penser que, pour les recomposer, il fallait opérer en sens inverse, c'est-à-dire additionner ensemble et successivement, comme il est dit ci-après, les termes des premières différences et ceux de la progression génératrice, et puis la somme qui provient de cette addition et le cube qui précède immédiatement. En effet, 1°. pour trouver le cube de 2, nous additionnons 1, le premier terme des différences des cubes, et 6, le second terme de la progression génératrice, puis 7, composé de 1 et de 6, et 1, cube de 1. La somme est 8, cube de 2. 2°. Pour trouver le cube de 3, nous additionnons 7, le second terme des différences des cubes, et 12, le troisième terme de la

progression génératrice, puis 19, composé de 7 et de 12, et 8, cube de 2. La somme est 27, cube de 3. 3°. Pour trouver le cube de 4, nous additionnons 19, le troisième terme des différences des cubes, et 18, le quatrième terme de la progression génératrice, puis 37, composé de 19 et de 18, et 27, cube de 3. La somme est 64, cube de 4. 4°. Pour trouver le cube de 5, nous additionnons 37, le quatrième terme des différences des cubes, et 24, le cinquième terme de la progression génératrice, puis 61, composé de 37 et de 24, et 64, cube de 4. La somme est 125, cube de 5. 5°. Pour trouver le cube de 6, nous additionnons 61, le cinquième terme des différences des cubes, et 30, le sixième terme de la progression génératrice, puis 91, composé de 61 et de 30, et 125, cube de 5. La somme est 216, cube de 6. 6°. Pour trouver le cube de 7, nous additionnons 91, le sixième terme des différences des cubes, et 36, le septième terme de la progression génératrice, puis 127, composé de 91 et de 36, et 216, cube de 6. La somme est 343, cube de 7. 7°. Pour trouver le cube de 8, nous additionnons 127, le septième terme des différences des cubes, et 42, le huitième terme de la progression génératrice, puis 169, composé de 127 et de 42, et 343, cube de 7. La somme est 512, cube de 8. 8°. Pour trouver le cube de 9, nous additionnons 169, le huitième terme des différences des cubes, et 48, le neuvième terme de la progression génératrice, puis 217, composé de 169 et de 48, et 512, cube de 8. La somme est 729, cube de 9. Ainsi de suite.

Cette règle est infaillible pour trouver jusqu'à l'infini les cubes des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, etc. Le tableau suivant, fait d'après elle, constate suffisamment cette vérité.

Nous observons que la composition de ce tableau est d'autant plus aisée que la formation des cubes dépend seulement de deux suites: la première, qui résulte des différences des

cubes pris successivement, est variable ; la seconde, qui résulte de celles des premières différences, est invariable puisqu'elle croît à chaque terme de 6, et par cela même se trouve avec facilité. La première suite, qui résulte de la différence des cubes, est formée de 1, son premier terme de 7, son second terme, la somme de 1 et de 6, le second terme de la progression génératrice des cubes ; de 19, son troisième terme, la somme de 7 et de 12, le troisième terme de la progression génératrice ; de 37, son quatrième terme, la somme de 19 et de 18, le quatrième terme de la progression génératrice ; de 61, son cinquième terme, la somme de 37 et de 24, le cinquième terme de la progression génératrice ; de 91, son sixième terme, la somme de 61 et de 30, le sixième terme de la progression génératrice ; de 127, son septième terme, la somme de 91 et de 36, le septième terme de la progression génératrice ; de 169, son huitième terme, la somme de 127 et de 42, le huitième terme de la progression génératrice, etc., etc. L'addition successive des termes de la première suite 1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, etc., etc., forme tous les cubes.

DEUXIÈME TABLEAU.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
1	1	1	0
2	8	7	6
3	27	19	12
4	64	37	18
5	125	61	24

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
6	216	91	30
7	343	127	36
8	512	169	42
9	729	217	48
10	1000	271	54
11	1331	331	60
12	1728	397	66
13	2197	469	72
14	2744	547	78
15	3375	631	84
16	4096	721	90
17	4913	817	96
18	5832	919	102
19	6859	1027	108
20	8000	1141	114
21	9261	1261	120
22	10648	1387	126
23	12167	1519	132
24	13824	1657	138
25	15625	1801	144
26	17576	1951	150
27	19683	2107	156
28	21952	2269	162
29	24389	2437	168
30	27000	2611	174
31	29791	2791	180
32	32768	2977	186
33	35937	3169	192
34	39304	3367	198
35	42875	3571	204
36	46656	3781	210
37	50653	3997	216
38	54872	4219	222
39	59319	4447	228
40	64000	4681	234

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
41	68921	4921	240
42	74088	5167	246
43	79507	5419	252
44	85184	5677	258
45	91125	5941	264
46	97336	6211	270
47	103823	6487	276
48	110592	6769	282
49	117649	7057	288
50	125000	7351	294
51	132651	7651	300
52	140608	7957	306
53	148877	8269	312
54	157464	8587	318
55	166375	8911	324
56	175616	9241	330
57	185193	9577	336
58	195112	9919	342
59	205379	10267	348
60	216000	10621	354
61	226981	10981	360
62	238328	11347	366
63	250047	11719	372
64	262144	12097	378
65	274625	12481	384
66	287496	12871	390
67	300763	13267	396
68	314432	13669	402
69	328509	14077	408
70	343000	14491	414
71	357911	14911	420
72	373248	15337	426
73	389017	15769	432
74	405224	16207	438
75	421875	16651	444

Racines.	Cubes.	Differences des cubes.	Progression génératrice.
76	438976	17101	450
77	456533	17557	456
78	474552	18019	462
79	493039	18487	468
80	512000	18961	474
81	531441	19441	480
82	551368	19927	486
83	571787	20419	492
84	592704	20917	498
85	614125	21421	504
86	636056	21931	510
87	658503	22447	516
88	681472	22969	522
89	704969	23497	528
90	729000	24031	534
91	753571	24571	540
92	778688	25117	546
93	804357	25669	552
94	830584	26227	558
95	857375	26791	564
96	884736	27361	570
97	912673	27937	576
98	941192	28519	582
99	970299	29107	588
100	1000000	29701	594
101	1030301	30301	600
102	1061208	30907	606
103	1092727	31519	612
104	1124864	32137	618
105	1157625	32761	624
106	1191016	33391	630
107	1225043	34027	636
108	1259712	34669	642
109	1295029	35317	648
110	1331000	35971	654

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
111	1367631	36631	660
112	1404928	37297	666
113	1442897	37969	672
114	1481544	38647	678
115	1520875	39331	684
116	1560896	40021	690
117	1601613	40717	696
118	1643032	41419	702
119	1685159	42127	708
120	1728000	42841	714
121	1771561	43561	720
122	1815848	44287	726
123	1860867	45019	732
124	1906624	45757	738
125	1953125	46501	744
126	2000376	47251	750
127	2048383	48007	756
128	2097152	48769	762
129	2146689	49537	768
130	2197000	50311	774
131	2248091	51091	780
132	2299968	51877	786
133	2352637	52669	792
134	2406104	53467	798
135	2460375	54271	804
136	2515456	55081	810
137	2571353	55897	816
138	2628072	56719	822
139	2685619	57547	828
140	2744000	58381	834
141	2803221	59221	840
142	2863288	60067	846
143	2924207	60919	852
144	2985984	61777	858
145	3048625	62641	864

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
146	3112136	63511	870
147	3176523	64387	876
148	3241792	65269	882
149	3307949	66157	888
150	3375000	67051	894
151	3442951	67951	900
152	3511808	68857	906
153	3581577	69769	912
154	3652264	70687	918
155	3723875	71611	924
156	3796416	72541	930
157	3869893	73477	936
158	3944312	74419	942
159	4019679	75367	948
160	4096000	76321	954
161	4173281	77281	960
162	4251528	78247	966
163	4330747	79219	972
164	4410944	80197	978
165	4492125	81181	984
166	4574296	82171	990
167	4657463	83167	996
168	4741632	84169	1002
169	4826809	85177	1008
170	4913000	86191	1014
171	5000211	87211	1020
172	5088448	88237	1026
173	5177717	89269	1032
174	5268024	90307	1038
175	5359375	91351	1044
176	5451776	92401	1050
177	5545233	93457	1056
178	5639752	94519	1062
179	5735339	95587	1068
180	5832000	96661	1074

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
181	5929741	97741	1080
182	6028568	98827	1086
183	6128487	99919	1092
184	6229504	101017	1098
185	6331625	102121	1104
186	6434856	103231	1110
187	6539203	104347	1116
188	6644672	105469	1122
189	6751269	106597	1128
190	6859000	107731	1134
191	6967871	108871	1140
192	7077888	110017	1146
193	7189057	111169	1152
194	7301384	112327	1158
195	7414875	113491	1164
196	7529536	114661	1170
197	7645373	115837	1176
198	7762392	117019	1182
199	7880599	118207	1188
200	8000000	119401	1194
201	8120601	120601	1200
202	8242408	121807	1206
203	8365427	123019	1212
204	8489664	124237	1218
205	8615125	125461	1224
206	8741816	126691	1230
207	8869743	127927	1236
208	8998912	129169	1242
209	9129329	130417	1248
210	9261000	131671	1254
211	9393931	132931	1260
212	9528128	134197	1266
213	9663597	135469	1272
214	9800344	136747	1278
215	9938375	138031	1284

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
216	10077696	139321	1290
217	10218313	140617	1296
218	10360232	141919	1302
219	10503459	143227	1308
220	10648000	144541	1314
221	10793861	145861	1320
222	10941048	147187	1326
223	11089567	148519	1332
224	11239424	149857	1338
225	11390625	151201	1344
226	11543176	152551	1350
227	11697083	153907	1356
228	11852352	155269	1362
229	12008989	156637	1368
230	12167000	158011	1374
231	12326391	159391	1380
232	12487168	160777	1386
233	12649337	162169	1392
234	12812904	163567	1398
235	12977875	164971	1404
236	13144256	166381	1410
237	13312053	167797	1416
238	13481272	169219	1422
239	13651919	170647	1428
240	13824000	172081	1434
241	13997521	173521	1440
242	14172488	174967	1446
243	14348907	176419	1452
244	14526784	177877	1458
245	14706125	179341	1464
246	14886936	180811	1470
247	15069223	182287	1476
248	15252992	183769	1482
249	15438249	185257	1488
250	15625000	186751	1494

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
251	15813251	188251	1500
252	16003008	189757	1506
253	16194277	191269	1512
254	16387064	192787	1518
255	16581375	194311	1524
256	16777216	195841	1530
257	16974593	197377	1536
258	17173512	198919	1542
259	17373979	200467	1548
260	17576000	202021	1554
261	17779581	203581	1560
262	17984728	205147	1566
263	18191447	206719	1572
264	18399744	208297	1578
265	18609625	209881	1584
266	18821096	211471	1590
267	19034163	213067	1596
268	19248832	214669	1602
269	19465109	216277	1608
270	19683000	217891	1614
271	19902511	219511	1620
272	20123648	221137	1626
273	20346417	222769	1632
274	20570824	224407	1638
275	20796875	226051	1644
276	21024576	227701	1650
277	21253933	229357	1656
278	21484952	231019	1662
279	21717639	232687	1668
280	21952000	234361	1674
281	22188041	236041	1680
282	22425768	237727	1686
283	22665187	239419	1692
284	22906304	241117	1698
285	23149125	242821	1704

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
286	23393656	244531	1710
287	23639903	246247	1716
288	23887872	247969	1722
289	24137569	249697	1728
290	24389000	251431	1734
291	24642171	253171	1740
292	24897088	254917	1746
293	25153757	256669	1752
294	25412184	258427	1758
295	25672375	260191	1764
296	25934336	261961	1770
297	26198073	263737	1776
298	26463592	265519	1782
299	26730899	267307	1788
300	27000000	269101	1794
301	27270901	270901	1800
302	27543608	272707	1806
303	27818127	274519	1812
304	28094464	276337	1818
305	28372625	278161	1824
306	28652616	279991	1830
307	28934443	281827	1836
308	29218112	283669	1842
309	29503629	285517	1848
310	29791000	287371	1854
311	30080231	289231	1860
312	30371328	291097	1866
313	30664297	292969	1872
314	30959144	294847	1878
315	31255875	296731	1884
316	31554496	298621	1890
317	31855013	300517	1896
318	32157432	302419	1902
319	32461759	304327	1908
320	32768000	306241	1914

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
321	33076161	308161	1920
322	33386248	310087	1926
323	33698267	312019	1932
324	34012224	313957	1938
325	34328125	315901	1944
326	34645976	317851	1950
327	34965783	319807	1956
328	35287552	321769	1962
329	35611289	323737	1968
330	35937000	325711	1974
331	36264691	327691	1980
332	36594368	329677	1986
333	36926037	331669	1992
334	37259704	333667	1998
335	37595375	335671	2004
336	37933056	337681	2010
337	38272753	339697	2016
338	38614472	341719	2022
339	38958219	343747	2028
340	39304000	345781	2034
341	39651821	347821	2040
342	40001688	349867	2046
343	40353607	351919	2052
344	40707584	353977	2058
345	41063625	356041	2064
346	41421736	358111	2070
347	41781923	360187	2076
348	42144192	362269	2082
349	42508549	364357	2088
350	42875000	366451	2094
351	43243551	368551	2100
352	43614208	370657	2106
353	43986977	372769	2112
354	44361864	374887	2118
355	44738875	377011	2124

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
356	45118016	379141	2130
357	45499293	881277	2136
358	45882712	383419	2142
359	46268279	385567	2148
360	46656000	387721	2154
361	47045881	389881	2160
362	47437928	392047	2166
363	47832147	394219	2172
364	48228544	396397	2178
365	48627125	398581	2184
366	49027896	400771	2190
367	49430863	402967	2196
368	49836032	405169	2202
369	50243409	407377	2208
370	50653000	409591	2214
371	51064811	411811	2220
372	51478848	414037	2226
373	51895117	416269	2232
374	52313624	418507	2238
375	52734375	420751	2244
376	53157376	423001	2250
377	53582633	425257	2256
378	54010152	427519	2262
379	54439919	429787	2268
380	54872000	432061	2274
381	55306341	434341	2280
382	55742968	436627	2286
383	56181887	438919	2292
384	56623104	441217	2298
385	57066625	443521	2304
386	57512456	445831	2310
387	57960603	448147	2316
388	58411072	450469	2322
389	58863869	452797	2328
390	59319000	455131	2334

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
391	59776471	457471	2340
392	60236288	459817	2346
393	60698457	462169	2352
394	61162984	464527	2358
395	61629875	466891	2364
396	62099136	469261	2370
397	62570773	471637	2376
398	63044792	474019	2382
399	63521199	476407	2388
400	64000000	478801	2394

DEUXIÈME SECTION.

Dixaines ascendantes de la racine vers l'infini, dont on forme les cubes.

L'addition successive jusqu'à l'infini de 1, premier terme de la suite des différences des cubes, et des termes de la progression génératrice 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, etc., etc., qui a 6 pour différence constante entre tous ses termes, et qui par cela même est calculable, forme la suite des différences des cubes 1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271, etc., etc. Cette suite, qui se rapproche de plus en plus de l'infini, est incalculable, par la raison que la différence varie entre tous ses termes, et que la multiplication de la somme des extrêmes par la moitié du nombre des termes donne, à chaque opération, un produit qui excède la quantité numérique, et n'exprime pas le cube correspondant; néanmoins, cette suite, dont les termes additionnés successivement jusqu'à l'infini, produit jusqu'à

l'infini les cubes des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, etc., etc.

De cette manière, nous venons de former les cubes de 400 unités ; maintenant, nous allons former ceux des dixaines, des centaines, des mille, des dix mille, des cent mille, des millions, des dix millions, des cent millions de la racine.

Comme la suite des différences des cubes, dont les termes sont successivement additionnés jusqu'à l'infini, produit jusqu'à l'infini les cubes des nombres naturels ; alors elle produit aussi les cubes des dixaines, des centaines, des mille, des dix mille, des cent mille, des millions, des dix millions, des cent millions de la racine, puisqu'ils sont tous compris dans la formation des cubes de la racine croissante d'unité en unité, et calculée jusqu'à l'infini, et puisqu'ils sont subordonnés à la même loi de calcul.

Comme les termes de la progression génératrice des cubes 0, 6, 12, 18, 24, 30, etc., etc., et ceux de la suite des différences des cubes 1, 7, 19, 37, 61, 91, etc., etc., concourent à former tous les cubes possibles, il est donc intéressant de connaître comment ces deux séries sont elles-mêmes formées, lorsque la racine passe de ses unités à ses dixaines, de ses dixaines à ses centaines, de ses centaines à ses mille, de ses mille à ses dix mille, de ses dix mille à ses cent mille, de ses cent mille à ses millions, de ses millions à ses dix millions, de ses dix millions à ses cent millions, et, après chacune de ces diverses transitions, augmente de dixaine en dixaine, de centaine en centaine, de mille en mille, de dix mille en dix mille, de cent mille en cent mille, de million en million, de dix millions en dix millions, de cent millions en cent millions.

Premièrement, lorsque la racine passe de ses unités à ses dixaines, les termes du principe générateur sont 0, 6000, 12000, 18000, 24000, 30000, etc., etc., dont la différence constante entre tous ses termes est 6000. Lorsque la racine

passe de ses dixaines à ses centaines, les termes du principe générateur sont 0, 6000000, 12000000, 18000000, 24000000, 30000000, etc., etc., dont la différence constante entre tous ses termes est 6000000. Lorsque la racine passe de ses centaines à ses mille, les termes du principe générateur sont 0, 6000000000, 12000000000, 18000000000, 24000000000, 30000000000, etc., etc., dont la différence constante entre tous ses termes est 6000000000. En général, les termes du principe générateur ont les chiffres qui expriment des quantités numériques les mêmes que ceux de la première progression, ou, ce qui signifie la même chose, du premier principe générateur des cubes de la racine qui augmente d'unité en en unité, et, de plus, ont un nombre de zéros triple de celui de la racine cubique. Chacune de ces séries, et d'autres subséquentes analogues, est une progression arithmétique croissante parfaitement semblable à cette première, 0, 6, 12, 18, 24, 30, etc., etc., dont la différence constante entre tous ses termes est 6, parce qu'elles sont toutes proportionnelles, et produisent, après la transition de chaque dixaine de la racine et l'addition de l'unité à chaque terme, les suites des différences des cubes, dont les termes, étant additionnés les uns à la suite des autres, forment les cubes des racines correspondantes. Nous remarquons que l'unité, premier terme de la suite des différences des cubes, étant additionnée avec 6, second terme de la progression génératrice, produit le second terme de la même suite, et se trouve dans tous ses autres termes suivans.

Secondement, lorsqu'on passe d'une dixaine de la racine à une autre immédiatement supérieure, on obtient avec facilité, en prenant la différence des cubes des deux dernières dixaines de la racine, le premier terme de la suite des différences des cubes, qui, étant additionnés l'un après l'autre avec les termes de la progression génératrice relative, compose tous les autres termes de la même suite, laquelle a la propriété immuable du for-

mer, par l'addition, tous les cubes des racines correspondantes.

Dans cette section, où la racine s'élève successivement d'une dixaine à une autre immédiatement supérieure, s'éloigne de plus en plus de ses unités, et ainsi se rapproche de l'infini, nous rendrons, autant que nous pourrons, intelligibles ces élémens absolument nécessaires pour leur formation; mais, afin de nous expliquer d'une manière plus méthodique et plus claire, nous la divisons en huit articles.

ARTICLE PREMIER.

Règle de transition des unités de la racine à ses dixaines.

Puisque nous passons des unités de la racine 400 à ses dixaines, nous nous servons des termes de la progression génératrice ou série 0, 6000, 12000, 18000, 24000, etc., etc., lesquels concourent à former les cubes de la racine qui augmente de dixaine en dixaine. Nous cherchons le terme de cette série qui correspond à la racine 400 et à son cube 64000000, 1°. en multipliant la racine 400 par 6; 2°. en soustrayant 6 du produit 2400, de sorte que la soustraction de 6 se fait sur le chiffre qui précède immédiatement le dernier; 3°. en mettant à la suite du reste 2340 deux zéros, pour avoir 234000, le terme de la série, dont le nombre des zéros est triple de celui de la racine suivante, et qui nous est nécessaire pour opérer dans la première dixaine ascendante.

Connaissant 400, la racine cubique, 64000000, son cube, et 234000, le terme correspondant de la progression génératrice, tous trois placés sur la même ligne, nous cherchons, dans le premier cas, où l'on passe des 400 unités de la racine à ses dixaines immédiates, le terme de la suite des différences des cubes qui leur correspond. Pour le trouver, il faut soustraire l'un de l'autre les cubes des deux dernières dixaines,

c'est-à-dire soustraire 59319000, cube de 390, de 64000000, cube de 400, pour avoir 4681000, le terme de la suite des différences des cubes que nous faisons correspondre à 400, la racine, à 64000000, son cube, à 234000, le terme de la progression génératrice, et servir à trouver les cubes des dixaines suivantes de la racine.

Comme, à chaque addition, nous augmentons de 6 le chiffre du terme de la progression génératrice placé immédiatement devant les trois zéros, ainsi les termes de cette série correspondans à 400, 410, 420, 430, 440, 450, etc., sont 234000, 240000, 246000, 252000, 258000, 264000, etc. D'après ces principes, aussi solides qu'aisés à concevoir, nous trouvons le cube de 410, en additionnant, 1°. 240000, le terme de cette série qui correspond à 410, la racine, et 4681000, le terme de la suite des différences des cubes; 2°. 4921000, la somme qui résulte de cette addition, et 64000000, le cube de 400, pour avoir celle de 68921000, le cube de 410. Nous trouvons le cube de 420 en additionnant, 1°. 246000, le terme de cette série qui correspond à 420, la racine, et 4921, le terme de la suite des différences des cubes; 2°. 5167000, la somme qui résulte de cette addition, et 68921000, le cube de 410, pour avoir celle de 74088000, le cube de 420. Nous trouvons le cube de 430 en additionnant, 1°. 252000, le terme de cette série qui correspond à 430, la racine, et 5167000, le terme de la suite des différences des cubes; 2°. 5419000, la somme qui résulte de cette addition, et 74088000, le cube de 420, pour avoir celle de 79507000, le cube de 430.

Cette opération est facile à voir dans la première suite du tableau deuxième, où l'on aperçoit aussitôt la manière d'obtenir les termes de la progression génératrice et ceux de la suite des différences des cubes, puisqu'il suffit, pour avoir chaque terme de la progression génératrice, d'augmenter, à chaque opération, de 6 le chiffre qui précède les trois zéros; et, pour avoir chaque terme de la suite

des différences des cubes, de sommer, à chaque opération, le dernier terme connu de la même suite et celui de la progression génératrice correspondant à la racine dont on cherche le cube. Ces deux séries concourent à former les cubes de la racine qui augmente de dixaine en dixaine. C'est ainsi que la génération de ces mêmes cubes se fait.

PREMIÈRE SUITE DU TABLEAU DEUXIÈME.

Formation des cubes des dixaines de la racine qui suivent immédiatement les cubes des 400 unités.

Dans la première suite du tableau deuxième, nous supprimons, pour faciliter l'impression, dans chaque cube, dans chaque terme de la suite des différences des cubes et dans chaque terme de la série, trois zéros qui sont absolument nécessaires, afin de rendre le calcul exact.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
400	64000	4681	234
410	68921	4921	240
420	74088	5167	246
430	79507	5419	252
440	85184	5677	258
450	91125	5941	264
460	97336	6211	270
470	103823	6487	276
480	110592	6769	282
490	117649	7057	288
500	125000	7351	294
510	132651	7651	300
520	140608	7957	306
530	148877	8269	312
540	157464	8587	318

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
550	166375	8911	324
560	175616	9241	330
570	185193	9577	336
580	195112	9919	342
590	205379	10267	348
600	216000	10621	354

ARTICLE II.

Règle de transition des dixaines de la racine à ses centaines.

Puisque nous passons des dixaines de la racine 600 à ses centaines, nous nous servons des termes de la progression génératrice ou série 0, 6000000, 12000000, 18000000,... 24000000, etc., etc., lesquels concourent à former les cubes de la racine qui augmente de centaine en centaine. Nous cherchons le terme de cette série qui correspond à la racine 600 et à son cube 216000, 1°. en multipliant la racine 600 par 6; 2°. en soustrayant 6 du produit 3600, de sorte que la soustraction de 6 se fait sur le chiffre qui précède immédiatement les deux derniers; 3°. en mettant à la suite du reste 3000 quatre zéros, pour avoir 30000000, le terme de la série, dont le nombre des zéros est triple de celui de la racine suivante, et qui nous est nécessaire pour la formation des cubes de la racine qui augmente de centaine en centaine.

Connaissant 600, la racine cubique, 216000, son cube, et 30000000, le terme correspondant de la progression génératrice, tous trois placés sur la même ligne, nous cherchons, dans le second cas, où l'on passe des dixaines de la racine 600 à ses centaines immédiates, le terme de la suite des dif-

férences des cubes qui leur correspond. Pour le trouver, il faut soustraire l'un de l'autre les cubes des deux dernières dixaines, qui sont effectivement les deux dernières centaines de la racine, c'est-à-dire soustraire 125000000, cube de 500, de 216000000, cube de 600, pour avoir 91000000, le terme de la suite des différences des cubes, que nous faisons correspondre à 600, la racine, à 216000000, son cube, à 30000000, le terme de la progression génératrice, et servir à trouver les cubes des centaines suivantes.

Comme, à chaque addition, nous augmentons de 6 le chiffre du terme de la progression génératrice placé devant les six zéros, ainsi les termes de cette série correspondans à 600, 700, 800, 900, 1000, 11000, etc., sont 30000000, 36000000, 42000000, 48000000, 54000000, 60000000, etc. D'après ces principes, aussi solides qu'aisés à concevoir, nous trouvons le cube de 700, en additionnant, 1°. 36000000, le terme de cette série qui correspond à 700, la racine, et 91000000, le terme de la suite des différences des cubes; 2°. 127000000, la somme qui résulte de cette addition, et 216000000, le cube de 600, pour avoir 343000000, le cube de 700. Nous trouvons le cube de 800 en additionnant, 1°. 42000000, le terme de cette série qui correspond à 800, la racine, et 127000000, le terme de la suite des différences des cubes; 2°. 169000000, la somme qui résulte de cette addition, et 343000000, le cube de 700, pour avoir 512000000, le cube de 800. Nous trouvons le cube de 900 en additionnant, 1°. 48000000, le terme de cette série qui correspond à 900, la racine, et 169000000, le terme de la suite des différences des cubes; 2°. 217000000, la somme qui résulte de cette addition, et 512000000, le cube de 800, pour avoir 729000000, le cube de 900. Ainsi de suite.

Cette opération est facile à voir dans la deuxième suite du tableau deuxième, où l'on aperçoit aussitôt les termes de la progression génératrice et ceux de la suite des différences des cubes, puisqu'il suffit, pour avoir chaque terme de la

progression génératrice, d'augmenter, à chaque opération, de 6 le chiffre qui précède les six zéros ; et, pour avoir chaque terme de la suite des différences des cubes, de sommer, à chaque opération, le dernier terme connu de la même suite et celui de la progression génératrice correspondant à la racine dont on cherche le cube. Ces deux séries concourent à former les cubes de la racine qui augmente de centaine en centaine. C'est ainsi que la génération de ces mêmes cubes se fait.

DEUXIÈME SUITE DU TABLEAU DEUXIÈME.

Formation des cubes des centaines de la racine qui suivent immédiatement les cubes du nombre 600.

Dans la deuxième suite du tableau deuxième, nous supprimons, pour faciliter l'impression, dans chaque cube, dans chaque terme de la suite des différences et dans chaque terme de la série, six zéros qui sont absolument nécessaires, afin de rendre le calcul exact.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
600	216	91	30
700	343	127	36
800	512	169	42
900	729	217	48
1000	1000	271	54
1100	1331	331	60
1200	1728	397	66
1300	2197	469	72
1400	2744	547	78
1500	3375	631	84
1600	4096	721.	90
1700	4913	817	96

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
1800	5832	919	102
1900	6859	1027	108
2000	8000	1141	114
2100	9261	1261	120
2200	10648	1387	126
2300	12167	1519	132
2400	13824	1657	138
2500	15625	1801	144
2600	17576	1951	150
2700	19683	2107	156
2800	21952	2269	162
2900	24389	2437	168
3000	27000	2611	174

ARTICLE III.

Règle de transition des centaines de la racine à ses mille.

Puisque nous passons des centaines de la racine 3000 à ses mille, nous nous servons des termes de la progression génératrice 0, 6000000000, 12000000000, 18000000000, 24000000000, etc., etc., lesquels concourent à former les cubes de la racine qui augmente de mille en mille. Nous cherchons le terme de cette série qui correspond à la racine 3000 et à son cube 27000000000, 1°. en multipliant la racine 3000 par 6; 2°. en soustrayant 6 du produit 18000, de sorte que la soustraction de 6 se fait sur le chiffre qui précède immédiatement les trois zéros; 3°. en mettant à la suite du reste 12000 six zéros, pour avoir le terme de la série 12000000000, dont le nombre des zéros est triple de celui de la racine suivante, et qui nous est nécessaire

pour la formation des cubes de la racine qui augmente de mille en mille.

Connaissant 3000, la racine cubique, 27000000000, son cube, et 12000000000, le terme correspondant de la progression génératrice, tous trois placés sur la même ligne, nous cherchons, dans le troisième cas, où l'on passe des centaines de la racine 3000 à ses mille immédiats, le terme de la suite des différences des cubes qui leur correspond. Pour le trouver, il faut soustraire l'un de l'autre les cubes des deux dernières dixaines de la racine, qui effectivement en sont les deux dernières mille unités, c'est-à-dire soustraire 8000000000, cube de 2000, de..... 27000000000, cube de 3000, pour avoir 19000000000, le terme de la suite des différences des cubes que nous faisons correspondre à 3000, la racine, à 27000000000, son cube, à 12000000000, le terme de la progression génératrice, et servir à trouver les cubes des mille suivans de la racine.

Comme, à chaque addition, nous augmentons de 6 le chiffre du terme de la progression génératrice placé devant les neuf zéros, ainsi les termes de cette série correspondans à 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, etc., sont 12000000000, 18000000000, 24000000000,..... 30000000000, 36000000000, 42000000000, etc. D'après ces principes, aussi solides qu'aisés à concevoir, nous trouvons le cube de 4000 en additionnant, 1°. 18000000000, le terme de cette série qui correspond à 4000, la racine, et 19000000000, le terme de la suite des différences des cubes; 2°. 37000000000, la somme qui résulte de cette addition, et 27000000000, le cube de 3000, pour avoir 64000000000, le cube de 4000. Nous trouvons le cube de 5000 en additionnant, 1°. 24000000000, le terme de cette série qui correspond à 5000, la racine, et..... 37000000000, le terme de la suite des différences des cubes; 2°. 61000000000, la somme qui résulte de cette

ddition, et 64000000000, le cube de 4000, pour avoir 125000000000, le cube de 5000.

Cette opération est facile à voir dans la troisième suite du tableau deuxième, où l'on aperçoit aussitôt la manière l'obtenir les termes de la progression génératrice et ceux le la suite des différences des cubes, puisqu'il suffit, pour voir chaque terme de la progression génératrice, d'augmenter, à chaque opération, de 6 le chiffre qui précède es neuf zéros; et, pour avoir chaque terme de la suite les différences des cubes, de sommer, à chaque opération, e dernier terme connu de la même suite et celui de la progression génératrice correspondant à la racine dont on herche le cube. Ces deux séries concourent à former les ubes de la racine qui augmente de mille en mille. C'est insi que la génération de ces mêmes cubes se fait.

TROISIÈME SUITE DU TABLEAU DEUXIÈME.

Formation des cubes des mille de la racine qui suivent immédiatement les cubes du nombre 3000.

Dans la troisième suite du tableau deuxième, nous supprimons, our faciliter l'impression, dans chaque cube, dans chaque terme e la suite des différences des cubes et dans chaque terme de la rie, neuf zéros qui sont absolument nécessaires, afin de rendre calcul exact.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
3000	27	19	12
4000	64	37	18
5000	125	61	24
6000	216	91	30
7000	343	127	36

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
8000	512	169	42
9000	729	217	48
10000	1000	271	54
11000	1331	331	60
12000	1728	397	66
13000	2197	469	72
14000	2744	547	78
15000	3375	631	84
16000	4096	721	90
17000	4913	817	96
18000	5832	919	102
19000	6859	1027	108
20000	8000	1141	114
21000	9261	1261	120
22000	10648	1387	126
23000	12167	1519	132
24000	13824	1657	138
25000	15625	1801	144
26000	17576	1951	150
27000	19683	2107	156

ARTICLE IV.

Règle de transition des mille de la racine à ses dix mille.

Puisque nous passons des mille de la racine 27000 à ses dix mille, alors nous mettons un zéro à la suite et trois zéros à son cube, afin d'avoir 19683000000000000, cube de 270000, et nous nous servons des termes de la progression génératrice 0, 6000000000000, 12000000000000, ... 18000000000000, 24000000000000, etc., etc., lesquels concourent à former les cubes de la racine qui augmente de

dix mille en dix mille. Nous cherchons le terme de cette série qui correspond à la racine 270000 et à son cube 19683000000000000, 1°. en multipliant la racine 270000 par 6; 2°. en soustrayant 6 du produit 1620000, de sorte que la soustraction de 6 se fait sur le chiffre qui précède immédiatement les quatre derniers; 3°. en mettant à la suite du reste 1560000 huit zéros, pour avoir 156000000000000, le terme de la série, dont le nombre des zéros est triple de celui de la racine, et qui nous est nécessaire pour la formation des cubes de la racine qui augmente de dix mille en dix mille.

Connaissant 270000, la racine cubique,..... 19683000000000000, son cube, et 156000000000000, le terme correspondant de la progression génératrice, tous trois placés sur la même ligne, nous cherchons, dans le quatrième cas, où l'on passe des mille de la racine 270000 à ses dix mille immédiats. Or, pour opérer cette transition, nous mettons un zéro à la suite, pour avoir celle de 270000. D'après cette transformation de la racine en une dixaine supérieure, il suffit, pour trouver le terme de la suite des différences des cubes qui leur correspond, de soustraire l'un de l'autre les cubes des deux dernières racines, qui en sont effectivement les deux dernières dix mille unités, c'est-à-dire de soustraire 17576000000000000, cube de 260000, de 19683000000000000, cube de 270000, pour avoir 2107000000000000, le terme de la suite des différences des cubes que nous faisons correspondre à... 270000, la racine, 19683000000000000, son cube, 156000000000000, le terme de la progression génératrice, et servir à trouver les cubes des dix mille suivans de la racine.

Comme, à chaque addition, nous augmentons de 6 le chiffre du terme de la progression génératrice placé devant les douze zéros, ainsi les termes de cette série correspondans à 270000, 280000, 290000, 300000, 310000,

320000, etc., etc., sont 1560000000000000, 1620000000000000, 1680000000000000, 1740000000000000, 1800000000000000, 1860000000000000, etc. D'après ces principes, aussi solides qu'aisés à concevoir, nous trouvons le cube de 280000 en additionnant, 1°. 1620000000000000, le terme de cette série qui correspond à 280000, la racine, et 21070000000000000, le terme de la suite des différences des cubes;..... 2°. 22690000000000000, la somme qui résulte de cette addition, et 19683000000000000, le cube de 270000, pour avoir 21952000000000000, cube de 280000. Nous trouvons le cube de 290000 en additionnant, 1°. 16800000000000000, le terme de cette série qui correspond à 290000, la racine, et 22690000000000000, le terme de la suite des différences des cubes; 2°. 24370000000000000, la somme qui résulte de cette addition, et 21952000000000000, le cube de 280000, pour avoir 24389000000000000, le cube de 290000; ainsi de suite. Cette opération est facile à voir dans la quatrième suite du tableau deuxième, où l'on aperçoit aussitôt la manière d'obtenir les termes de la progression génératrice et ceux de la suite des différences des cubes, puisqu'il suffit, pour avoir chaque terme de la progression génératrice, d'augmenter, à chaque opération, de 6 le chiffre qui précède les douze zéros; et pour avoir chaque terme de la suite des différences des cubes, de sommer, à chaque opération, le dernier terme connu de la même suite et celui de la progression génératrice correspondant à la racine dont on cherche le cube. Ces deux séries concourent à former les cubes de la racine qui augmente de dix mille en dix mille. C'est ainsi que la génération de ces mêmes cubes se fait.

QUATRIÈME SUITE DU TABLEAU DEUXIÈME.

'ormation des cubes des dix mille de la racine qui suivent immédiatement les cubes du nombre 270000.

Dans la quatrième suite du tableau deuxième, nous supprimons, our faciliter l'impression, dans chaque cube, dans chaque terme e la suite des différences des cubes et dans chaque terme de la irie, douze zéros qui sont absolument nécessaires, afin de rendre e calcul exact.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
270000	19683	2107	156
280000	21952	2269	162
290000	24389	2437	168
300000	27000	2611	174
310000	29791	2791	180
320000	32768	2977	186
330000	35937	3169	192
340000	39304	3367	198
350000	42875	3571	204
360000	46656	3781	210
370000	50653	3997	216
380000	54872	4219	222
390000	59319	4447	228
400000	64000	4681	234
410000	68921	4921	240
420000	74088	5167	246
430000	79507	5419	252
440000	85184	5677	258
450000	91125	5941	264
460000	97336	6211	270

ARTICLE V.

Règle de transition des dix mille de la racine à ses cent mille.

Puisque nous passons des dix mille de la racine à ses cent mille, nous nous servons des termes de la progression génératrice 0, 6000000000000000, 12000000000000000,.... 18000000000000000, 24000000000000000, etc., etc., lesquels concourent à former les cubes de la racine 4600000, qui augmente de cent mille en cent mille, laquelle se trouve accrue d'un zéro, à l'effet de trouver ainsi les cubes. Nous cherchons le terme de cette série qui correspond à la racine 4600000 et à son cube 97336000000000000000; 1°. en multipliant la racine 4600000 par 6; 2°. en soustrayant 6 du produit 27600000, de sorte que la soustraction de 6 se fait sur le chiffre qui précède immédiatement les cinq derniers; 3°. en mettant à la suite du reste 27000000 dix zéros, pour avoir 270000000000000000, le terme de la série, dont le nombre des zéros est triple de celui de la racine, et qui nous est nécessaire pour la formation des cubes de la racine qui augmente de cent mille en cent mille.

Connaissant 4600000, la racine cubique,..... 97336000000000000000, son cube, et 270000000000000000, le terme correspondant de la progression génératrice, tous trois placés sur la même ligne, nous cherchons, dans le cinquième cas, où l'on passe des dix mille de la racine 460000 à ses cent mille immédiats. Or, pour opérer cette transition, nous mettons un zéro à la suite, pour avoir celle de 4600000. D'après cette transformation de la racine en une dixaine supérieure, il suffit, pour trouver le terme de la suite des différences des cubes qui leur correspond, de soustraire l'un de l'autre les cubes des deux dernières racines, qui en sont effectivement les deux dernières cent mille unités, c'est-à-dire de soustraire 91125000000000000000, cube de 4500000,

de 97336000000000000000, cube de 4600000, pour avoir 62110000000000000000, le terme de la suite des différences des cubes que nous faisons correspondre à 4600000, à 97336000000000000000, son cube, à 27000000000000000000, le terme de la progression génératrice, et servir à trouver les cubes des cent mille suivans de la racine.

Comme, à chaque addition, nous augmentons de 6 le chiffre du terme de la progression génératrice placé devant les quinze zéros, les termes de cette série correspondans à 4600000, 4700000, 4800000, 4900000, 5000000, 5100000, etc., sont 27000000000000000000, 27600000000000000000, ... 28200000000000000000, 28800000000000000000, ... 29400000000000000000, 30000000000000000000, etc. D'après ces principes, aussi solides qu'aisés à concevoir, nous trouvons le cube de 4700000, en additionnant, ...

1°. 27600000000000000000, le terme de cette série qui correspond à 4700000, la racine, et 62110000000000000000, le terme de la suite des différences des cubes; .....

2°. 64870000000000000000, la somme qui résulte de cette addition, et 97336000000000000000, le cube de 4600000, pour avoir 103823000000000000000, le cube de 4700000. Nous trouvons le cube de 4800000 en additionnant, ...

1°. 28200000000000000000, le terme de cette série qui correspond à 4800000, la racine, et 64870000000000000000, le terme de la suite des différences; 2°. 67690000000000000000, la somme qui résulte de cette addition, et .....

103823000000000000000, le cube de 4700000, pour avoir 110592000000000000000, le cube de 4800000. Ainsi de suite.

Cette opération est facile à voir dans la cinquième suite du tableau deuxième, où l'on aperçoit aussitôt la manière d'obtenir les termes de la progression génératrice et ceux de la suite des différences des cubes, puisqu'il suffit, pour avoir chaque terme de la progression génératrice, d'augmenter, à chaque opération, de 6 le chiffre qui précède les quinze zéros; et pour avoir chaque terme de la suite

des différences des cubes, de sommet, à chaque opération, le dernier terme connu de la même suite et celui de la progression génératrice correspondant à la racine dont on cherche le cube. Ces deux séries concourent à former les cubes de la racine qui augmente de cent mille en cent mille. C'est ainsi que la génération de ces mêmes cubes se fait.

CINQUIÈME SUITE DU TABLEAU DEUXIÈME.

Formation des cubes des cent mille de la racine qui suivent immédiatement les cubes du nombre 4600000.

Dans la cinquième suite du tableau deuxième, nous supprimons, pour faciliter l'impression, dans chaque cube, dans chaque terme de la suite des différences des cubes et dans chaque terme de la série, quinze zéros qui sont absolument nécessaires, afin de rendre le calcul exact.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
4600000	97336	6211	270
4700000	103823	6487	276
4800000	110592	6769	282
4900000	117649	7057	288
5000000	125000	7351	294
5100000	132651	7651	300
5200000	140608	7957	306
5300000	148877	8269	312
5400000	157464	8587	318
5500000	166375	8911	324
5600000	175616	9241	330
5700000	185193	9577	336
5800000	195112	9919	342
5900000	205379	10267	348
6000000	216000	10621	354

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
6100000	226981	10981	360
6200000	238328	11347	366
6300000	250047	11719	372
6400000	262144	12097	378
6500000	274625	12481	384

ARTICLE VI.

Règle de transition des cent mille de la racine à ses millions.

Puisque nous passons des cent mille de la racine à ses millions, nous nous servons des termes de la progression génératrice 6, 600000000000000000, 1200000000000000000, 1800000000000000000, 2400000000000000000, etc., etc., lesquels concourent à former les cubes de la racine 6500000, accrue d'un zéro, laquelle augmente de million en million. Nous cherchons le terme de cette série qui correspond à la racine 65000000 et à son cube 27462500000000000000000, 1°. en multipliant la racine 6500000 par 6; 2°. en soustrayant 6 du produit 39000000, de sorte que la soustraction de 6 se fait sur le chiffre qui précède immédiatement les six derniers; 3°. en mettant à la suite du reste 38400000 douze zéros, pour avoir 384000000000000000000, le terme de la série, dont le nombre des zéros est triple de celui de la racine, et qui nous est nécessaire pour la formation des cubes de la racine qui augmente de million en million.

Connaissant 65000000, la racine cubique, ... 27462500000000000000000, son cube, et ..... 384000000000000000000, le terme correspondant de la progression génératrice, tous trois placés sur la même ligne,

nous cherchons, dans le sixième cas, où l'on passe des cent mille de la racine 6500000 à ses millions immédiats. Or, pour opérer cette transition, nous mettons un zéro à la suite, pour avoir celle de 65000000. D'après cette transformation de la racine en une dixaine supérieure, il suffit, pour trouver le terme de la suite des différences des cubes qui leur correspond, de soustraire l'un de l'autre les cubes des deux dernières racines, qui sont effectivement les deux dernières millionièmes unités, c'est-à-dire de soustraire..... 262144000000000000000000, cube de 64000000, de..... 274625000000000000000000, cube de 65000000, pour avoir 12481000000000000000000, le terme de la suite des différences des cubes que nous faisons correspondre à 65000000, la racine, à 274625000000000000000000, son cube, à... 384000000000000000000, le terme de la progression génératrice, et servir à trouver les cubes des millions suivans de la racine.

Comme, à chaque addition, nous augmentons de 6 le chiffre du terme de la progression génératrice placé devant les dix-huit zéros, ainsi les termes de cette série correspondans à 65000000, 66000000, 67000000, 68000000, 69000000, 70000000, etc., sont 384000000000000000000, 390000000000000000000, 396000000000000000000, 402000000000000000000,..... 408000000000000000000, 414000000000000000000, etc., etc., D'après ces principes, aussi solides qu'aisés à concevoir, nous trouvons le cube de 66000000 en additionnant,..... 1°. 390000000000000000000, le terme de cette série qui correspond à 66000000, la racine, et 12481000000000000000000, le terme de la suite des différences des cubes;..... 2°. 12871000000000000000000, la somme qui résulte de cette addition, et 274625000000000000000000, le cube de 65000000, pour avoir 287496000000000000000000, le cube de 66000000. Nous trouvons le cube de 67000000 en additionnant, 1°. 396000000000000000000, le terme de cette série qui correspond à 67000000, la racine,, et.....

12871000000000000000000, le terme de la suite des différences des cubes; 2°. 1326700000000000000000, la somme qui résulte de cette addition, et 2874960000000000000000000, le cube de 66000000, pour avoir 300763000000000000000000, le cube de 67000000. Ainsi de suite.

Cette opération est facile à voir dans la sixième suite du tableau deuxième, où l'on aperçoit aussitôt la manière d'obtenir les termes de la progression génératrice et ceux de la suite des différences des cubes, puisqu'il suffit, pour avoir chaque terme de la progression génératrice, d'augmenter, à chaque opération, de 6 le chiffre qui précède les dix-huit zéros; et pour avoir chaque terme de la suite des différences des cubes, de sommer, à chaque opération, le dernier terme connu de la même suite et celui de la progression génératrice correspondant à la racine dont on cherche le cube. Ces deux séries concourent à former les cubes de la racine qui augmente de million en million. C'est ainsi que la génération de ces mêmes cubes se fait.

SIXIÈME SUITE DU TABLEAU DEUXIÈME.

Formation des cubes des millions de la racine qui suivent immédiatement les cubes du nombre 65000000.

Dans la sixième suite du tableau deuxième, nous supprimons, pour faciliter l'impression, dans chaque cube, dans chaque terme de la suite des différences des cubes et dans chaque terme de la série, dix-huit zéros qui sont absolument nécessaires, afin de rendre le calcul exact.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
65000000	274625	12481	384
66000000	287496	12871	390

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice
67000000	300763	13267	396
68000000	314432	13669	402
69000000	328509	14077	408
70000000	343000	14491	414
71000000	357911	14911	420
72000000	373248	15337	426
73000000	389017	15769	432
74000000	405224	16207	438
75000000	421875	16651	444
76000000	438976	17101	450
77000000	456533	17557	456
78000000	474552	18019	462
79000000	493039	18487	468
80000000	512000	18961	474
81000000	531441	19441	480
82000000	551368	19927	486
83000000	571787	20419	492
84000000	592704	20917	498
85000000	614125	21421	504
86000000	636056	21931	510
87000000	658503	22447	516
88000000	681472	22969	522
89000000	704969	23497	528
90000000	729000	24031	534

ARTICLE VII.

Règle de transition des millions de la racine à ses dix millions.

Puisque nous passons des millions de la racine à ses dix millions, nous nous servons des termes de la progression génératrice 0, 600000000000000000000, ... 1200000000000000000000, 1800000000000000000000,

2400000000000000000000, etc., etc., lesquels concourent à former les cubes de la racine 9000000, qui augmente de dix millions en dix millions. Nous cherchons le terme de cette série qui correspond à la racine 90000000 et à son cube 729000000000000000000000, 1°. en multipliant la racine 90000000 par 6; 2°. en soustrayant 6 du produit 540000000, de sorte que la soustraction de 6 se fait sur le chiffre qui précède immédiatement les sept derniers; 3°. en mettant à la suite du reste 480000000 quatorze zéros, pour avoir 480000000000000000000000, le terme de la série, dont le nombre des zéros est le triple de celui de la racine, et qui nous est nécessaire pour la formation des cubes de la racine qui augmente de dix millions en dix millions.

Connaissant 90000000, la racine cubique,..... 729000000000000000000000, son cube, et..... 480000000000000000000000, le terme correspondant de la progression génératrice, tous trois placés sur la même ligne, nous cherchons, dans le septième cas, où l'on passe des millions de la racine 90000000 à ses dix millions immédiats, le terme de la suite des différences des cubes qui leur correspond. Pour le trouver, il faut soustraire l'un de l'autre les cubes des deux dernières dixaines de la racine, qui en sont effectivement les deux dernières dix-millionièmes unités, c'est-à-dire soustraire 5120000000000000000000000, cube de 80000000, de 729000000000000000000000, cube de 90000000, pour avoir 217000000000000000000000, le terme de la suite des différences des cubes que nous faisons correspondre à 90000000, la racine, à 729000000000000000000000, son cube, à 480000000000000000000000, le terme de la progression génératrice, et servir à trouver les cubes des dix millions suivans de la racine.

Comme, à chaque addition, nous augmentons de 6 le chiffre du terme de la progression génératrice placé devant les vingt-un zéros, ainsi les termes de cette série corres-

pondans à 9000000, 100000000, 110000000, 120000000, 130000000, 140000000, etc., sont 480000000000000000000000, 540000000000000000000000, 600000000000000000000000, 660000000000000000000000, 720000000000000000000000, 780000000000000000000000, etc. D'après ces principes, aussi solides qu'aisés à concevoir, nous trouvons le cube de 100000000 en additionnant, 1°. 540000000000000000000000, le terme de cette série qui correspond à 100000000, la racine, et 217000000000000000000000, le terme de la suite des différences des cubes; 2°. 271000000000000000000000, la somme qui résulte de cette addition, et..... 729000000000000000000000, le cube de 90000000, pour avoir 1000000000000000000000000, le cube de 100000000. Nous trouvons le cube de 110000000 en additionnant, 1°. 600000000000000000000000, le terme de cette série qui correspond à 110000000, la racine, et..... 271000000000000000000000, le terme de la suite des différences des cubes; 2°. 331000000000000000000000, la somme qui résulte de cette addition, et..... 1000000000000000000000000, le cube de 100000000, pour avoir 1331000000000000000000000, le cube de 110000000. Ainsi de suite.

Cette opération est facile à voir dans la septième suite du tableau deuxième, où l'on aperçoit aussitôt la manière d'obtenir les termes de la progression génératrice et ceux de la suite des différences des cubes, puisqu'il suffit, pour avoir chaque terme de la progression génératrice, d'augmenter, à chaque opération, de 6 le chiffre qui précède les vingt-un zéros; et pour avoir chaque terme de la suite des différences des cubes, de sommer, à chaque opération, le dernier terme connu de la même suite et celui de la progression génératrice correspondant à la racine dont on cherche le cube. Ces deux séries concourent à former les cubes de la racine qui augmente de dix millions en dix millions. C'est ainsi que la génération de ces mêmes cubes se fait.

SEPTIÈME SUITE DU TABLEAU DEUXIÈME.

Formation des cubes des dix millions de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 90000000.

Dans la septième suite du tableau deuxième, nous supprimons, pour faciliter l'impression, dans chaque cube, dans chaque terme de la suite des différences des cubes et dans chaque terme de la série, vingt-un zéros qui sont absolument nécessaires, afin de rendre le calcul exact.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
90000000	729	217	48
100000000	1000	271	54
110000000	1331	331	60
120000000	1728	397	66
130000000	2197	469	72
140000000	2744	547	78
150000000	3375	631	84
160000000	4096	721	90
170000000	4913	817	96
180000000	5832	919	102
190000000	6859	1027	108
200000000	8000	1141	114
210000000	9261	1261	120
220000000	10648	1387	126
230000000	12167	1519	132
240000000	13824	1657	138
250000000	15625	1801	144
260000000	17576	1951	150
270000000	19683	2107	156
280000000	21952	2269	162
290000000	24389	2437	168
300000000	27000	2611	174
310000000	29791	2791	180

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
320000000	32768	2977	186
330000000	35937	3169	192
340000000	39304	3367	198
350000000	42875	3571	204
360000000	46656	3781	210
370000000	50653	3997	216
380000000	54872	4219	222
390000000	59319	4447	228
400000000	64000	4681	234

ARTICLE VIII.

Règle de transition des dix millions de la racine à ses cent millions.

Puisque nous passons des dix millions de la racine à ses cent millions, nous nous servons des termes de la progression génératrice 0, 60000000000000000000000000, ... 120000000000000000000000000, 180000000000000000000000000, 240000000060000000000000000, etc., etc., lesquels concourent à former les cubes de la racine 400000000, qui augmente de cent millions en cent millions. Nous cherchons le terme de cette série qui correspond à la racine 400000000 et à son cube 64000000000000000000000000, 1°. en multipliant la racine 400000000 par 6; 2°. en soustrayant 6 du produit 2400000000, de sorte que la soustraction de 6 se fait sur le chiffre qui précède les huit derniers; 3°. en mettant à la suite du reste 1800000000 seize zéros, pour avoir..... 1800000000000000000000000000, le terme de la série, dont le nombre des zéros est triple de celui de la racine, et qui nous est nécessaire pour la formation des cubes de la racine qui augmente de cent millions en cent millions.

Connaissant 400000000, la racine cubique,.....
4000000000000000000000000, son cube, et.....
8000000000000000000000000, le terme correspondant de
a progression génératrice, tous trois placés sur la même
igne, nous cherchons, dans le huitième cas, où l'on passe
es dix millions de la racine 40000000 à ses cent mil-
ions immédiats, le terme de la suite des différences des
ubes qui leur correspond. Pour le trouver, il faut sous-
raire l'un de l'autre les cubes des deux dernières dixaines
e la racine, qui en sont effectivement les deux dernières
ent-millionièmes unités, c'est-à-dire soustraire.....
7000000000000000000000000, cube de 300000000, de
4000000000000000000000000, cube de 400000000, pour
voir 3700000000000000000000000, le terme de la suite
es différences des cubes que nous faisons correspondre à
00000000, la racine, à 6400000000000000000000000,
on cube, à 3700000000000000000000000, le terme de la
rogression génératrice, et servir à trouver les cubes des
ent millions suivans de la racine.

Comme, à chaque addition, nous augmentons de 6 le
hiffre du terme de la progression génératrice placé devant
es vingt-quatre zéros, ainsi les termes de cette série cor-
espondans à 400000000, 500000000, 600000000,.....
00000000, 800000000, 900000000, etc., etc., sont...
8900000000000000000000000, 2400000000000000000000000,
0000000000000000000000000, 3600000000000000000000000,
2000000000000000000000000, 4800000000000000000000000,
tc., etc. D'après ces principes, aussi solides qu'aisés à con-
evoir, nous trouvons le cube de 500000000 en addition-
ant, 1°. 2400000000000000000000000, le terme de cette
érie qui correspond à 500000000, la racine, et.....
7000000000000000000000000, le terme de la suite des
ifférences des cubes; 2°. 6100000000000000000000000,
a somme qui résulte de cette addition, et.....
4000000000000000000000000, le cube de 400000000,

pour avoir 125000000000000000000000000, le cube de 50000000. Nous trouvons le cube de 60000000 en additionnant, 1°. 300000000000000000000000000, le terme de cette série qui correspond à 60000000, la racine, et 610000000000000000000000000, le terme de la suite des différences des cubes; 2°. 910000000000000000000000000, la somme qui résulte de cette addition, et ..... 125000000000000000000000000, le cube de 50000000, pour avoir 216000000000000000000000000, le cube de 60000000.

Cette opération est facile à voir dans la huitième suite du tableau deuxième, où l'on aperçoit aussitôt la manière d'obtenir les termes de la progression génératrice et ceux de la suite des différences des cubes, puisqu'il suffit, pour avoir chaque terme de la progression génératrice, d'augmenter, à chaque opération, de 6 le chiffre qui précède les vingt-quatre zéros; et pour avoir chaque terme de la suite des différences des cubes, de sommer, à chaque opération, le dernier terme connu de la même suite et celui de la progression génératrice correspondant à la racine dont on cherche le cube. Ces deux séries concourent à former les cubes de la racine qui augmente de cent millions en cent millions. C'est ainsi que la génération de ces mêmes cubes se fait.

HUITIÈME SUITE DU TABLEAU DEUXIÈME.

Formation des cubes des cent millions de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 400000000.

Dans la huitième suite du tableau deuxième, nous supprimons, pour faciliter l'impression, dans chaque cube, dans chaque terme de la suite des différences des cubes et dans chaque terme de la série, vingt-quatre zéros qui sont absolument nécessaires, afin de rendre le calcul exact.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
400000000	64	37	18
500000000	125	61	24
600000000	216	91	30
700000000	343	127	36
800000000	512	169	42
900000000	729	217	48
1000000000	1000	271	54
1100000000	1331	331	60
1200000000	1728	397	66
1300000000	2197	469	72
1400000000	2744	547	78
1500000000	3375	631	84
1600000000	4096	721	90
1700000000	4913	817	96
1800000000	5832	919	102
1900000000	6859	1027	108
2000000000	8000	1141	114
2100000000	9261	1261	120
2200000000	10648	1387	126
2300000000	12167	1519	132
2400000000	13824	1657	138
2500000000	15625	1801	144
2600000000	17576	1951	150
2700000000	19683	2107	156
2800000000	21952	2269	162

L'élévation des dixaines ascendantes de la racine qui s rapproche de plus en plus de l'infini nous a fait penser qu'i fallait employer les séries ascendantes pour nous faire trouver les règles de la formation de leurs cubes ; aussi, par un raison inverse, l'abaissement des dixaines descendantes de l racine qui se rapproche de plus en plus de ses unités nous fait penser qu'il fallait employer les séries descendantes pou nous faire trouver les règles de la formation de leurs cubes Les premières règles nous ont conduit naturellement à nou faire trouver les secondes, qui servent à extraire la racin cubique d'un nombre donné.

Nous observons que, sur les huit articles suivans, nou prendrons les huit racines 280, 2980, 29980, 299980 2999980, 29999980, 299999980, 2999999980, qui de plu en plus se rapprochent de dixaine en dixaine descendant vers ses unités, pour trouver chaque terme de la suite de différences des cubes qui résulte de cette formule numérique, le triple quarré de la racine correspondante, moin la même racine triplée, plus 1, lequel terme concourt nous faire avoir chaque cube.

TROISIÈME SECTION.

Dixaines descendantes de la racine vers ses unités dont on forme les cubes.

Nous venons de voir, en élevant la racine de dixaine e dixaine, dont les chiffres qui expriment des quantités nu mériques vont de droite à gauche, ainsi l'éloignent de plu en plus de ses unités, et l'augmentent en raison décuple la méthode avec laquelle nous pouvons parvenir à connaîtr les cubes des plus grands nombres, c'est-à-dire les cubes d ceux qui s'approchent ainsi de l'infini.

Maintenant, nous allons abaisser la racine déjà élevée à un grand nombre de dixaines en dixaines qui vont de gauche à droite, c'est-à-dire approcher de plus en plus les chiffres qui expriment des quantités numériques vers ses unités, et enfin montrer la méthode qui nous apprend à trouver les cubes des dixaines descendantes de la racine, ainsi que ceux de ses unités, et qui sert aussi à trouver les racines cubiques de quelques nombres.

En général, nous observons que le nombre des zéros des racines est, par rapport au nombre des zéros de leurs cubes, des termes de la suite des différences des cubes et des termes correspondans de la progression génératrice, comme 1 est à 3.

Comme les dixaines descendantes de la racine nous rapprochent de plus en plus de ses unités, de même les séries descendantes nous rapprochent de plus en plus de la série primitive 0, 6, 12, 18, 24, 30, etc., etc., qui est la base de la formation des cubes des nombres premiers 1, 2, 3, 4, 5, etc., etc., qui augmentent d'unité en unité.

Dans la seconde section, les séries étaient croissantes; dans cette troisième, elles seront décroissantes. Les séries croissantes et décroissantes ayant la même raison arithmétique, sont calculées d'après les même règles; aussi, nous ne mentionnerons pas dans cette section ces dernières, nous nous contenterons seulement d'obtenir, suivant les principes établis, chaque terme de la progression génératrice ou série correspondant à chaque dixaine descendante de la racine, et propre pour coopérer avec chaque terme de la suite des différences des cubes, à former le cube de chacune d'elles, et à extraire la racine d'un nombre quelconque.

Afin de nous expliquer plus clairement et plus méthodiquement, nous divisons la section troisième, où la racine s'abaisse de dixaine en dixaine, et ainsi se rapproche de ses unités, en huit articles.

ARTICLE PREMIER.

Règle de transition des cent millions de la racine à ses dix millions.

Premièrement, si nous voulions continuer à chercher les cubes des racines qui vont de cent millions en cent millions, et qui suivent immédiatement le cube du nombre 2800000000, alors nous chercherions les cubes de..... 2800000000, 2900000000, 3000000000, 3100000000, 3200000000, 3300000000, etc.; mais puisque nous voulons trouver les cubes des dixaines descendantes de la racine, lesquels suivent immédiatement le cube connu du nombre 2800000000, il faut passer des cent millions aux dix millions.

Pour opérer cette transition, 1°. on avance une dixaine vers la droite, et l'on a pour racines 2800000000,..... 2810000000, 2820000000, 2830000000, 2840000000, 2850000000, etc.; 2°. on place sur la même ligne... 2800000000, 21952000000000000000000000000, son cube; 3°. on multiplie 2800000000, la racine cubique, par 6; 4°. on soustrait 6 de 16800000000, produit de cette multiplication, de manière que la soustraction de 6 soit faite sur le chiffre qui précède immédiatement les sept derniers. On obtient 1674000000, le terme de la progression génératrice correspondant à la racine 2800000000 et à son cube. Cependant, comme le nombre des zéros doit être triple de celui des zéros de 2810000000, la racine suivante; aussi, dans ce premier cas, les termes de la progression génératrice correspondans à 2800000000, 2810000000, 2820000000, 2830000000, 2840000000, etc., etc., sont 1674000000000000000000000, 1680000000000000000000000, 1686000000000000000000000, 1692000000000000000000000, 1698000000000000000000000, etc., etc.

Connaissant 2800000000, la racine cubique,.....

219520000000000000000000000000, son cube, et..... 167400000000000000000000000, le terme correspondant de la progression génératrice, tous trois placés sur la même ligne, nous cherchons, dans le premier cas, où l'on descend des cent millions de la racine aux dix millions, le terme de la suite des différences des cubes qui leur correspond. Comme nous avons découvert que chaque terme de la suite des différences des cubes égale trois fois le quarré de la racine cubique correspondante, moins trois fois cette même racine, plus 1, nous trouvons, de cette manière, le terme de la suite des différences des cubes correspondant à 280, la racine cubique, 1°. en obtenant 235200, le quarré triple de la racine cubique 280; 2°. en soustrayant 840, la racine triplée, de 235200, quarré triplé; 3°. en ajoutant une unité à 234360, le reste, pour avoir 234361, le terme auquel nous joignons vingt-un zéros.

Ensuite, nous plaçons sur la même ligne 2800000000, la racine, 219520000000000000000000000000, son cube,.... 234361000000000000000000000, le terme de la suite des différences des cubes, et 167400000000000000000000000, le terme de la progression génératrice. Enfin, nous augmentons de 6 le chiffre du terme de la progression génératrice placé immédiatement devant les vingt-un zéros à chaque addition qui se fait, comme il est dit ci-après. Ainsi, pour trouver le cube de 2810000000, nous additionnons,..... 1°. 168000000000000000000000000, le terme de la progression génératrice qui correspond à cette racine cubique, et 234361000000000000000000000, le terme de la suite des différences des cubes; 2°. 236041000000000000000000000, la somme de cette addition, et,..... 219520000000000000000000000000, cube de 2800000000, pour avoir 221880410000000000000000000000, cube de 2810000000. Pour trouver le cube de 2820000000, nous additionnons, 1°. 168600000000000000000000000, le terme de la progression génératrice qui correspond à cette racine

cubique, et 23604000000000000000000000, le terme de la suite des différences des cubes ;.....

2°. 237327000000000000000000000, la somme de cette addition, et 221880400000000000000000000, cube de 281000000, pour avoir 224257680000000000000000000, cube de 282000000.

Cette opération est facile à concevoir dans la neuvième suite du tableau deuxième, où l'on a commencé à former les cubes des dixaines descendantes de la racine élevée jusqu'à 280000000, ainsi à nous rapprocher de ceux de ses unités, où l'on aperçoit d'abord la manière d'obtenir les termes de la progression génératrice et ceux de la suite des différences des cubes, deux séries qui concourent à former les cubes de la racine qui augmente de dix millions en dix millions, où l'on voit comment la génération de ces mêmes cubes se fait.

FORMATION DES CUBES DES DIXAINES DESCENDANTES DE LA RACINE VERS SES UNITÉS.

NEUVIÈME SUITE DU TABLEAU DEUXIÈME.

Formation des cubes des dix millions de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 280000000.

Dans la neuvième suite du tableau deuxième, nous supprimons, pour faciliter l'impression, dans chaque cube, dans chaque terme de la suite des différences des cubes et dans chaque terme de la série, vingt-un zéros qui sont absolument nécessaires, afin de rendre le calcul exact.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
280000000	21952000	234361	1074
281000000	22188041	236041	1689

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
2820000000	22425768	237727	1686
2830000000	22665187	239419	1692
2840000000	22906304	241117	1698
2850000000	23149125	242821	1704
2860000000	23393656	244531	1710
2870000000	23639903	246247	1716
2880000000	23887872	247969	1722
2890000000	24137569	249697	1728
2900000000	24389000	251431	1734
2910000000	24642171	253171	1740
2920000000	24897088	254917	1746
2930000000	25153757	256669	1752
2940000000	25412184	258427	1758
2950000000	25672375	260191	1764
2960000000	25934336	261961	1770
2970000000	26198073	263737	1776
2980000000	26463592	265519	1782

ARTICLE II.

Règle de transition des dix millions de la racine à ses millions.

Deuxièmement, si nous voulions continuer à chercher les cubes des racines qui vont de dix millions en dix millions, et qui suivent immédiatement le cube du nombre 2980000000, alors nous chercherions les cubes de..... 2980000000, 2990000000, 3000000000, 3010000000, 3020000000, 3030000000, etc.; mais puisque nous voulons trouver les cubes des dixaines descendantes de la racine, lesquels suivent immédiatement le cube connu du nombre 2980000000, il faut passer des dix millions aux millions.

Pour opérer cette transition, 1°. on avance une dixaine vers la droite, et l'on a pour racines 2980000000,.... 2981000000, 2982000000, 2983000000, 2984000000, 2985000000, etc.; 2°. on place sur la même ligne..... 2980000000, 26463592000000000000000000000, son cube; 3°. on multiplie 2980000000, la racine cubique, par 6; 4°. on soustrait 6 de 17880000000, produit de cette multiplication, de manière que la soustraction de 6 soit faite sur le chiffre qui précède immédiatement les six derniers; on obtient 17874000000, le terme de la progression génératrice correspondant à la racine 2980000000 et à son cube. Cependant, comme le nombre des zéros doit être triple de celui des zéros de 2981000000, la racine suivante, aussi, dans ce second cas, les termes de la progression génératrice correspondans à 2980000000, 2981000000, 2982000000, 2983000000, 2984000000, etc., sont..... 17874000000000000000000, 17880000000000000000000, 17886000000000000000000, 17892000000000000000000, etc., etc.

Connaissant 2980000000, la racine cubique,..... 26463592000000000000000000000, son cube, et..... 17874000000000000000000, le terme correspondant de la progression génératrice, tous trois placés sur la même ligne, nous cherchons, dans le second cas, où l'on descend des dix millions de la racine aux millions, le terme de la suite des différences des cubes qui leur correspond, que nous trouvons ainsi. Comme le terme de la suite des différences des cubes égale le triple quarré de la racine 2980, moins cette même racine triplée, plus 1, alors nous cherchons, 1°. le triple quarré de 2980, qui est 26641200, et la triple racine, qui est 8940; 2°. nous ôtons 8940, la racine triplée, de 26641200, quarré triplé, pour avoir, plus 1, 26632261, le terme de la suite des différences des cubes, auquel nous joignons dix-huit zéros.

Ensuite, nous plaçons sur la même ligne 2980000000, la

racine, 264635920000000000000000000000, son cube,.. 266322610000000000000000000, le terme de la suite des différences des cubes, et 17874000000000000000000, le terme de la progression génératrice. Enfin, nous augmentons, à chaque addition faite comme ci-après, de 6 le chiffre placé immédiatement devant les dix-huit zéros. Ainsi, pour trouver le cube de 298100000, nous additionnons,..... 1°. 17880000000000000000000, le terme de la progression génératrice qui correspond à cette racine cubique, et.... 266322610000000000000000000, le terme de la suite des différences des cubes; 2°. 26650141000000000000000000, la somme de cette addition, et..... 264635920000000000000000000000, cube de 298000000, pour avoir 264902421410000000000000000000, cube de 298100000. Pour trouver le cube de 298200000, nous additionnons, 1°. 17886000000000000000000, le terme de la progression génératrice qui correspond à cette racine cubique, et 26650141000000000000000000000;..... 2°. 26668027000000000000000000000, la somme de cette addition, et 264902421410000000000000000000, le cube de 298100000, pour avoir 265169101680000000000000000000, le cube de 298200000.

Cette opération est facile à concevoir dans la dixième suite du tableau second, où l'on aperçoit aussitôt la manière d'obtenir les termes de la progression génératrice et ceux de la suite des différences des cubes, deux séries qui concourent à former les cubes de la racine qui augmente de million en million, où l'on voit comment la génération de ces mêmes cubes se fait.

DIXIÈME SUITE DU TABLEAU DEUXIÈME.

Formation des cubes des millions de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 2980000000.

Dans la dixième suite du tableau deuxième, nous supprimons, pour faciliter l'impression, dans chaque cube, dans chaque terme de la suite des différences des cubes et dans chaque terme de la série, dix-huit zéros qui sont absolument nécessaires, afin de rendre le calcul exact.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
2980000000	2646359200 0	26632261	17874
2981000000	2649024214 1	26650141	17880
2982000000	2651691016 8	26668027	17886
2983000000	2654359608 7	26685919	17892
2984000000	2657029990 4	26703817	17898
2985000000	2659702162 5	26721721	17904
2986000000	2662376125 6	26739631	17910
2987000000	2665051880 3	26757547	17916
2988000000	2667729427 2	26775469	17922
2989000000	2670408766 9	26793397	17928
2990000000	2673089900 0	26811331	17934
2991000000	2675772827 1	26829271	17940
2992000000	2678457548 8	26847217	17946
2993000000	2681144065 7	26865169	17952
2994000000	2683832378 4	26883127	17958
2995000000	2686522487 5	26901091	17964
2996000000	2689214393 6	26919061	17970
2997000000	2691908097 3	26937037	17976
2998000000	2694603599 2	26955019	17982

ARTICLE III.

Règle de transition des millions de la racine à ses cent mille.

Troisièmement, si nous voulions continuer à chercher les cubes des racines qui vont de million en million, et qui suivent immédiatement le cube du nombre 2998000000, alors nous chercherions les cubes de 2998000000, 2999000000, 3000000000, 3001000000, 3002000000, 3003000000, etc.; mais puisque nous voulons trouver les cubes des dixaines descendantes de la racine, lesquels suivent immédiatement le cube connu du nombre 2998000000, il faut passer des millions aux cent mille.

Pour opérer cette transition, 1°. on avance une dixaine vers la droite, et l'on a pour racines 2998000000,..... 2998100000, 2998200000, 2998300000, 2998400000, 2998500000, etc.; 2°. on place sur la même ligne..... 2998000000, 26946035992000000000000000000, son cube; 3°. on multiplie 2998000000, la racine cubique, par 6; 4°. on soustrait 6 de 17988000000, produit de cette multiplication, de manière que la soustraction de 6 soit faite sur le chiffre qui précède immédiatement les cinq derniers: on obtient 17987400000, le terme de la progression génératrice correspondant à la racine 2998000000 et à son cube. Cependant, comme le nombre des zéros doit être triple de celui des zéros de 2998100000, la racine suivante, aussi, dans ce troisième cas, les termes de la progression génératrice correspondans à 2998000000, 2998100000, 2998200000, 2998300000, 2998400000, etc., sont 17987400000000000000, 17988000000000000000, 17988600000000000000,..... 17989200000000000000, etc.

Connaissant 2998000000, la racine cubique,..... 26946035992000000000000000000, son cube, et..... 17987400000000000000, le terme correspondant de la pro-

gression génératrice, tous trois placés sur la même ligne, nous cherchons, dans le troisième cas, où l'on descend des millions de la racine aux cent mille, le terme de la suite des différences des cubes qui leur correspond. Pour le trouver, nous cherchons, suivant la formule générale, qui est infaillible, 1°. le triple quarré de 29980, qui est 2696401200, et la triple racine, qui est 89940; 2°. nous ôtons 89940, la racine triplée, de 2696401200, quarré triplé, pour avoir, en y ajoutant une unité, 2696311261, le terme de la suite des différences des cubes, auquel nous joignons quinze zéros.

Ensuite, nous plaçons sur la même ligne 2998000000, la racine, 26946035992000000000000000000, son cube,.... 26963112610000000000000000, le terme de la suite des différences des cubes, et 1798740000000000000000, le terme de la progression génératrice. Enfin, nous augmentons, à chaque addition faite comme ci-après, de 6 le chiffre du terme de la progression génératrice placé immédiatement devant les quinze zéros. Ainsi, pour trouver le cube de 2998100000, nous additionnons, 1°. 1798800000000000000000, le terme de la progression génératrice qui correspond à cette racine cubique, et 26963112610000000000000000, le terme de la suite des différences des cubes; 2°. 26964911410000000000000000, la somme de cette addition, et..... 26946035992000000000000000000, le cube de 2998000000, pour avoir 26948732483141000000000000000000, le cube de 2998100000. Pour trouver le cube de 2998200000, nous additionnons, 1°. 1798860000000000000000, le terme de la progression génératrice qui correspond à cette racine cubique, et 26964911410000000000000000, le terme de la suite des différences des cubes; 2°. 26966710270000000000000000, la somme de cette addition, et..... 26948732483141000000000000000000, le cube de 2998100000, pour avoir 26951429154168000000000000000000, le cube de 2998200000.

Cette opération est facile à concevoir dans la onzième suite

du tableau deuxième, où l'on aperçoit aussitôt la manière d'obtenir les termes de la progression génératrice et ceux de la suite des différences des cubes, deux séries qui concourent à former les cubes de la racine qui augmente de cent mille en cent mille, où l'on voit comment la génération de ces mêmes cubes se fait.

ONZIÈME SUITE DU TABLEAU DEUXIÈME.

Formation des cubes des cent mille de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 2998000000.

Dans la onzième suite du tableau deuxième, nous supprimons, pour faciliter l'impression, dans chaque cube, dans chaque terme de la suite des différences des cubes et dans chaque terme de la série, quinze zéros qui sont absolument nécessaires, afin de rendre le calcul exact.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
2998000000	26946035992000	26963111261	179874
2998100000	26948732483141	26964911141	179880
2998200000	26951429154168	26966671027	179886
2998300000	26954126005087	26968850919	179892
2998400000	26956823035904	26970308017	179898
2998500000	26959520246625	26972107121	179904
2998600000	26962217637256	26973906311	179910
2998700000	26964915207803	26975705471	179916
2998800000	26967612958272	26977504691	179922
2998900000	26970310888669	26979303971	179928
2999000000	26973008999000	26981103311	179934
2999100000	26975707289271	26982902711	179940
2999200000	26978405759488	26984702171	179946
2999300000	26981104409657	26986501691	179952
2999400000	26983803239784	26988301271	179958
2999500000	26986502249875	26990100911	179964
2999600000	26989201439936	26991900611	179970
2999700000	26991900809973	26993700371	179976
2999800000	26994600359992	26995500191	179982

ARTICLE IV.

Règle de transition des cent mille de la racine à ses dix mille

Quatrièmement, si nous voulions continuer à chercher les cubes des racines qui vont de cent mille en cent mille, et qui suivent immédiatement le cube du nombre 2999800000, alors nous chercherions les cubes de 2999800000, 2999900000, 3000000000, 3000100000, 3000200000, 3000300000, etc.; mais puisque nous voulons trouver les cubes des dixaines descendantes de la racine 2999800000, il faut passer des cent mille aux dix mille.

Pour opérer cette transition, 1°. on avance une dixaine vers la droite, et l'on a pour racines 2999800000, 2999810000, 2999820000, 2999830000, 2999840000, 2999850000, etc.; 2°. on place sur la même ligne 2999800000, ... 26994600359992000000000000000, son cube; 3.° on multiplie 2999800000, la racine cubique par 6; 4°. on soustrait 6 de 17998800000, le produit de cette multiplication, de manière que la soustraction de 6 soit faite sur le chiffre qui précède immédiatement les quatre derniers: on obtient 17998740000, le terme de la progression génératrice correspondant à la racine 2999800000 et à son cube. Cependant, comme le nombre des zéros doit être triple de celui des zéros de 2999810000, la racine suivante, aussi, dans ce quatrième cas, les termes de la progression génératrice correspondans à 2999800000, 2999810000, 2999820000, 2999830000, 2999840000, etc., sont 17998740000000000000, 17998800000000000000, ... 17998860000000000000, 17998920000000000000, ... 17998980000000000000, etc.

Connaissant 2999800000, la racine cubique, ... 26994600359992000000000000000, son cube, ... et 17998740000000000000, le terme correspondant de la progression génératrice, tous trois placés sur la même ligne, nous cherchons, dans le quatrième cas, où l'on descend des

nt mille de la racine à ses dix mille, le terme de la suite
s différences des cubes qui leur correspond. Nous le trou-
ons ainsi, 1°. en prenant le triple quarré de 299980, qui
st 269964001200, et la triple racine, qui est 899940; 2°. en
tant 899940, la racine triplée, de 269964001200, quarré
riplé, pour avoir, en y ajoutant une unité, 269963101261,
e terme de la suite des différences des cubes, auquel nous
ignons douze zéros.

Ensuite, nous plaçons sur la même ligne 2999800000, la
acine, 26994600359992000000000000000, son cube,.....
6996310126100000000000, le terme de la suite des diffé-
ences des cubes, et 1799874000000000000, le terme de la
rogression génératrice; enfin, nous augmentons, à chaque
ddition faite comme ci-après, de 6 le chiffre du terme de la
rogression génératrice placé immédiatement devant les douze
éros. Ainsi, pour trouver le cube de 2999810000, nous ad-
itionnons, 1°. 1799880000000000000, le terme de la pro-
ression génératrice qui correspond à cette racine cubique,
t 269963101261000000000000, le terme de la suite des
ifférences des cubes; 2°. 269964901141000000000000, la
omme de cette addition, et.....
6994600359992000000000000000000, le cube de 2999800000,
our avoir 269948703248931410000000000000, le cube de
999810000. Pour trouver le cube de 2999820000, nous ad-
itionnons, 1°. 1799886000000000000, le terme de la pro-
ression génératrice qui correspond à cette racine cubique,
t 269964901141000000000000, le terme de la suite des dif-
érences des cubes; 2°. 269966701027000000000000000, la somme
e cette addition, et 269948703248931410000000000000, le
ube de 2999810000, pour avoir.....
6995140291594168000000000000000, le cube de 2999820000.

Cette opération est facile à concevoir dans la douzième
uite du tableau second, où l'on aperçoit aussitôt la manière
'obtenir les termes de la progression génératrice et ceux de
a suite des différences des cubes, deux séries qui concourent

à former les cubes de la racine qui augmente de dix mille et dix mille, où l'on voit comment la génération de ces mêmes cubes se fait.

DOUZIÈME SUITE DU TABLEAU DEUXIÈME.

Formation des cubes des dix mille de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 2999800000.

Dans la douzième suite du tableau deuxième, nous supprimons, pour faciliter l'impression, dans chaque cube, dans chaque terme de la suite des différences des cubes et dans chaque terme de la série, douze zéros qui sont absolument nécessaires, afin de rendre le calcul exact.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
2999800000	26994600359992000	26996310 01261	1799874
2999810000	26994870324893141	26996490 11141	1799880
2999820000	26995140291594168	26996670 10027	1799886
2999830000	26995410260095087	26996850 09919	1799892
2999840000	26995680230395904	26997030 08817	1799898
2999850000	26995950202496625	26997210 07721	1799904
2999860000	26996220176397256	26997390 06631	1799910
2999870000	26996490152097803	26997570 05547	1799916
2999880000	26996760129598272	26997750 04469	1799922
2999890000	26997030108898669	26997930 03397	1799928
2999900000	26997300089999000	26998110 03331	1799934
2999910000	26997570072899271	26998290 02271	1799940
2999920000	26997840057599488	26998470 02217	1799946
2999930000	26998110044099657	26998650 01169	1799952
2999940000	26998380032399784	26998830 01127	1799958
2999950000	26998650022499875	26999010 00091	1799964
2999960000	26998920014399936	26999190 00061	1799970
2999970000	26999190008099973	26999370 00037	1799976
2999980000	26999460003599992	26999550 00019	1799982

ARTICLE V.

le de transition des dix mille de la racine à ses mille.

linquièmement, si nous voulions continuer à chercher cubes des racines qui vont de dix mille en dix mille, et suivent immédiatement le cube du nombre 299998000, rs nous chercherions les cubes de 299998000,..... 9990000, 3000000000, 3000010000, 3000020000,.... 0030000, etc.; mais puisque nous voulons trouver les cudes dixaines descendantes de la racine 299998000, il faut ser des dix mille aux mille.

Pour opérer cette transition, 1°. on avance une dixaine s la droite, et l'on a pour racines 299998000, 299998100, 99982000, 299998300, 299998400, 299998500, etc.; on place sur la même ligne 299998000,..... 99946000359999200000000000000, son cube; 3°. on multie 299998000, la racine cubique par 6; 4°. on soustrait 6 17999880000, produit de cette multiplication, de maire que la soustraction de 6 soit faite sur le chiffre qui préle immédiatement les trois derniers; on obtient..... 999874000, le terme de la progression génératrice corpondant à la racine 299998000 et à son cube. Cependant, mme le nombre des zéros doit être triple de celui des zéros 299998100, la racine suivante, aussi, dans ce cinquième s, les termes de la progression génératrice correspondans à 99980000, 299998100, 299998200, 299998300,..... 99984000, etc., sont 17999874000000000, ... 999988000000000000, etc.

Connaissant 299998000 la racine cubique,..... 99946000359999200000000000000, son cube, et ..... 99987400000000000, le terme correspondant de la progresn génératrice, tous trois placés sur la même ligne, nous erchons, dans le cinquième cas, où l'on descend des dix ille de la racine à ses mille, le terme de la suite des diffé-

rences des cubes qui leur correspond. Pour le trouver, no
savons que chaque terme de la suite de la différence des cul
égale le triple quarré de la racine correspondante, moi
cette même racine triplée, plus 1 : alors nous obtenon
1°. le triple quarré de 2999980, la racine, qui est.....
26999640001200, et la triple racine, qui est 8999940; 2°. no
ôtons 8999940, la racine triplée, de 26999640001200, quar
triplé, pour avoir, en y ajoutant une unité, 26999631001260
le terme de la suite des différences des cubes, auquel nous jo
gnons neuf zéros.

Ensuite, nous plaçons sur la même ligne 2999980000,
racine, 26999460003599992000000000000, son cube,.....
26999631001261000000000, le terme de la suite des diffé
rences des cubes, et 17999874000000000, le terme de la pr
gression génératrice. Enfin, nous ajoutons, à chaque additio
faite comme ci-après, 6 au chiffre du terme de la progressio
génératrice placé immédiatement devant les neuf zéro
Ainsi, pour trouver le cube de 2999981000, nous additionn
nons, 1°. 17999880000000000, le terme de la progressio
génératrice qui correspond à cette racine cubique, et....
26999631001261000000000, le terme de la suite des diffé
rences des cubes; 2°. 26999649001141000000000, la somm
de cette addition, et 26999460003599992000000000000, cub
de 2999980000, pour avoir.....
26999487003248993141000000000, cube de 2999981000
Pour trouver le cube de 2999982000, nous additionnons
1°. 17999886000000000, le terme de la progression généra
trice qui correspond à cette racine cubique, et.....
26999649001141000000000, le terme de la suite des diffé
rences des cubes; 2°. 26999667001027000000000, la somm
de cette addition, et 26999487003248993141000000000, l
cube de 2999981000, pour avoir.....
26999514002915994168000000000, le cube de 2999982000

Cette opération est facile à concevoir dans la treizièm
suite du tableau second, où l'on aperçoit aussitôt la manièr

'obtenir les termes de la progression génératrice, et ceux de
ı suite des différences des cubes, deux séries qui concourent
former les cubes de la racine qui augmente de mille en
ille, où l'on voit comment la génération de ces mêmes cubes
e fait.

TREIZIÈME SUITE DU TABLEAU DEUXIÈME.

Formation des cubes des mille de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 2999980000.

Dans la treizième suite du tableau deuxième, nous supprimons, our faciliter l'impression, dans chaque cube, dans chaque terme le la suite des différences des cubes et dans chaque terme de la sé-ie, neuf zéros qui sont absolument nécessaires, afin de rendre le alcul exact.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
99980000	26999460003599992000	26999631001261	17999874
99981000	26999487003248993141	26999649001141	17999880
99982000	26999514002915994168	26999667001027	17999886
99983000	26999541002600995087	26999685000919	17999892
99984000	26999568002303995904	26999703000817	17999898
99985000	26999595002024996625	26999721000721	17999904
99986000	26999622001763997256	26999739000631	17999910
99987000	26999649001520997803	26999757000547	17999916
99988000	26999676001295998272	26999775000469	17999922
99989000	26999703001088998669	26999793000397	17999928
99990000	26999730000899999000	26999811000331	17999934
99991000	26999757000728999271	26999829000271	17999940
99992000	26999784000575999488	26999847000217	17999946
99993000	26999811000440999657	26999865000169	17999952
99994000	26999838000323999784	26999883000127	17999958
99995000	26999865000224999875	26999901000091	17999964
99996000	26999892000143999936	26999919000061	17999970
99997000	26999919000080999973	26999937000037	17999976
99998000	26999946000035999992	26999955000019	17999982

ARTICLE VI.

Règle de transition des mille de la racine à ses centaines.

Sixièmement, si nous voulions continuer à chercher l
cubes des racines qui vont de mille en mille, et qui suive
immédiatement le cube du nombre 2999998000, alors no
chercherions les cubes de 2999998000, 2999999000,...
3000000000, 3000001000, 3000002000, 3000003000, etc.
mais puisque nous voulons trouver les cubes des dixain
descendantes de la racine 2999998000, il faut passer d
mille aux centaines.

Pour opérer cette transition, 1°. on avance une dixai
vers la droite, et l'on a pour racines 2999998000,....
29999998100, 2999998200, 2999998300, 2999998400
2999998500, etc.; 2°. on place sur la même ligne....
2999998000, 26999946000035999992000000000, son cub
3°. on multiplie 2999998000, la racine cubique, par 6
4°. on soustrait 6 de 179999880oo, produit de cette multi
plication, de manière que la soustraction de 6 soit faite s
le chiffre qui précède immédiatement les deux derniers : o
obtient 1799998740o, le terme de la progression génératric
correspondant à la racine 2999998oo et à son cube. Cepen
dant, comme le nombre des zéros doit être triple de cel
des zéros de 2999998100, la racine suivante, aussi, dans c
sixième cas, les termes de la progression génératrice corres
pondans à 2999998000, 2999998100, 2999998200,....
2999998300, 2999998400, etc., sont 1799998740000oo
1799998801000000, 1799998860000000, 1799998920000000
1799998980000000, etc.

Connaissant 2999998000, la racine cubique,.....
26999946000035999992000000000, son cube, et.....
1799998740000oo, le terme correspondant de la progressio
génératrice, tous trois placés sur la même ligne, nous cher

chons, dans le sixième cas, où l'on descend des mille de la racine à ses centaines, le terme de la suite des différences des cubes qui leur correspond. Pour le trouver, nous savons que chaque terme de la suite des différences des cubes égale le triple quarré de la racine correspondante, moins cette même racine triplée, plus 1, alors nous cherchons, suivant cette formule générale et infaillible, 1°. le triple quarré de 29999980, qui est 2699996400001200, et la triple racine, qui est 89999940; 2°. nous ôtons 89999940, la racine triplée, de 2699996400001200, quarré triplé, pour avoir, en y ajoutant une unité, 2699996310001261, le terme de la suite des différences des cubes, auquel nous joignons six zéros.

Ensuite, nous plaçons sur la même ligne 2999998000, la racine, 26999946000035999992000000000, son cube,..... 2699996310001261000000, le terme de la suite des différences des cubes, et 1799998740000000, le terme de la progression génératrice. Enfin, nous ajoutons, à chaque addition faite comme ci-après, 6 au chiffre du terme de la progression génératrice placé immédiatement devant les six zéros. Ainsi, pour trouver le cube de 2999998100, nous additionnons, 1°. 1799998800000000, le terme de la progression génératrice qui correspond à cette racine cubique, et..... 2699996310001261000000, le terme de la suite des différences des cubes; 2°. 2699996490001141000000, la somme de cette addition, et 26999946000035999992000000000, cube de 29999980, pour avoir 269999487000324899931410000000, cube de 2999998100. Pour trouver le cube de 2999998200, nous additionnons, 1°. 1799998860000000, le terme de la progression génératrice qui correspond à cette racine cubique, et 2699996490001141000000, le terme de la suite des différences des cubes; 2°. 2699996670001027000000, la somme de cette addition, et 269999487000324899931410000000, pour avoir 26999951410002915999416800000000, le cube de..... 2999998200.

Cette opération est facile à concevoir dans la quatorzième

suite du tableau deuxième, où l'on aperçoit aussitôt la manière d'obtenir les termes de la progression génératrice et ceux de la suite des différences des cubes, deux séries qui concourent à former les cubes de la racine qui augmente de centaine en centaine, où l'on voit comment la génération de ces mêmes cubes se fait.

QUATORZIÈME SUITE DU TABLEAU DEUXIÈME.

Formation des cubes des centaines de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 299999800.

Dans la quatorzième suite du tableau deuxième, nous supprimons, pour faciliter l'impression, dans chaque cube, dans chaque terme de la suite des différences des cubes et dans chaque terme de la série, six zéros qui sont absolument nécessaires, afin de rendre le calcul exact.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice
299999800	26999946000035999992000	26999963100001261	17999
299999810	26999948700032489993141	26999964900011141	17999
299999820	26999951400029159994168	26999966700001027	17999
299999830	26999954100026099995087	26999968500000919	17999
299999840	26999956800023039995904	26999970300000817	17999
299999850	26999959500020249996625	26999972100000721	17999
299999860	26999962200017639997256	26999973900000631	17999
299999870	26999964900015209997803	26999975700000547	17999
299999880	26999967600012959998272	26999977500000469	17999
299999890	26999970300010889998669	26999979300000397	17999
299999900	26999973000008999999000	26999981100000331	17999
299999910	26999975700007289999271	26999982900000271	17999
299999920	26999978400005759999488	26999984700000217	17999
299999930	26999981100004409999657	26999986500000169	17999
299999940	26999983800003239999784	26999988300000127	17999
299999950	26999986500002249999875	26999990100000091	17999
299999960	26999989200001439999936	26999991900000061	17999
299999970	26999991900000809999973	26999993700000037	17999
299999980	26999994600000359999992	26999995500000019	17999

ARTICLE VII.

Règle de transition des centaines de la racine à ses dixaines.

Septièmement, si nous voulions continuer à chercher les cubes des racines qui vont de centaine en centaine, et qui suivent immédiatement le cube du nombre 2999999800, alors nous chercherions les cubes de 2999999800,..... 2999999900, 3000000000, 3000000100, 3000000200, 3000000300, etc.; mais puisque nous voulons trouver les cubes des dixaines descendantes de la racine 2999999800, il faut passer des centaines aux dixaines.

Pour opérer cette transition, 1°. on avance une dixaine vers la droite, et l'on a pour racines 2999999800,..... 2999999810, 2999999820, 2999999830, 2999999840, 2999999850, etc.; 2°. on place sur la même ligne..... 2999999800, 26999994600000359999992000000, son cube; 3°. on multiplie 2999999800, la racine cubique, par 6; 4°. on soustrait 6 de 17999998800, produit de cette multiplication, de manière que la soustraction de 6 soit faite sur le chiffre qui précède immédiatement le dernier: on obtient 17999998740, le terme de la progression génératrice correspondant à la racine 2999999800 et à son cube. Cependant, comme le nombre des zéros doit être triple de celui des zéros de 2999999810, la racine suivante, aussi, dans ce septième cas, les termes de la progression génératrice correspondans à 2999999800, 2999999810, 2999999820,..... 2999999830, 2999999840, 2999999850, etc., sont..... 17999998740000, 17999998800000, 17999998860000,..... 17999998920000, 17999998980000, 17999999040000, etc.

Connaissant 2999999800, la racine cubique,..... 26999994600000359999992000000, son cube, et..... 17999998740000, le terme correspondant de la progression génératrice, tous trois placés sur la même ligne, nous cher-

chons, dans le septième cas, où l'on descend des centaines de la racine à ses dixaines, le terme de la suite des différences des cubes qui leur correspond. Pour le trouver, nous savons que chaque terme de la suite des différences des cubes égale le triple quarré de la racine correspondante, moins cette même racine triplée, plus 1, alors nous cherchons, 1°. le triple quarré de 29999998o, qui est..... 26999996400000120o, et la triple racine, qui est 899999940; 2°. nous ôtons 899999940, la racine triplée, de..... 26999996400000120o, quarré triplé, pour avoir, en y ajoutant une unité, 26999996310000126i, le terme de la suite des différences des cubes, auquel nous joignons trois zéros.

Ensuite, nous plaçons sur la même ligne 2999999800, la racine, 269999946000003599999900000o, son cube,.... 26999996310000126100o, le terme de la suite des différences des cubes, et 1799999874000, le terme de la progression génératrice. Enfin, nous ajoutons, à chaque addition faite comme ci-après, 6 au chiffre du terme de la progression génératrice placé immédiatement devant les trois zéros. Ainsi, pour trouver le cube de 2999999810, nous additionnons, 1°. 1799999880000, le terme de la progression génératrice qui correspond à cette racine cubique, et..... 26999996310000126100o, le terme de la suite des différences des cubes; 2°. 26999996490000114100o, la somme de cette addition, et 269999946000003599999920000oo, cube de 2999999800, pour avoir..... 26999999487000032489999314100o, le cube de 2999999810. Pour trouver le cube de 2999999820, nous additionnons, 1°. 1799999886000, le terme de la progression génératric qui correspond à cette racine cubique, et..... 26999996490000114100o, le terme de la suite des différences des cubes; 2°. 26999996670000102700o, la somm de cette addition, et 269999948700003248999931410oo, cube de 2999999810, pour avoir..... 26999995140000291599994168000, le cube de 2999999820.

Cette opération est facile à concevoir dans la quinzième suite du tableau deuxième, où l'on aperçoit aussitôt la manière d'obtenir les termes de la progression génératrice et ceux de la suite des différences des cubes, deux séries qui concourent à former les cubes de la racine qui augmente de dixaine en dixaine, où l'on voit comment la génération de ces mêmes cubes se fait.

QUINZIÈME SUITE

Formation des cubes des dixaines de la racine qui suiv

Racines.	Cubes.
2999999800	26999994600000359999992000000
2999999810	26999994870000324899993141000
2999999820	26999995140000291599994168000
2999999830	26999995410000260099995087000
2999999840	26999995680000230399995904000
2999999850	26999995950000202499996625000
2999999860	26999996220000176399997256000
2999999870	26999996490000152099997803000
2999999880	26999996760000129599998272000
2999999890	26999997030000108899998669000
2999999900	26999997300000089999999000000
2999999910	26999997570000072899999271000
2999999920	26999997840000057599999488000
2999999930	26999998110000044099999657000
2999999940	26999998380000032399999784000
2999999950	26999998650000022499999875000
2999999960	26999998920000014399999936000
2999999970	26999999190000008099999973000
2999999980	26999999460000003599999992000

ARTICLE VIII.

Règle de transition des dixaines de la racine à ses unités.

Huitièmement, si nous voulions continuer à chercher les cubes des racines qui vont de dixaine en dixaine, et qui suivent immédiatement le cube du nombre 2999999980, alors nous chercherions les cubes de 2999999980, 2999999990,

édiatement ceux du nombre 2999999800.

Différences des cubes.	Progression génératrice.
269999963100001261000	1799999874000
269999964900001141000	1799999880000
269999966700001027000	1799999886000
269999968500000919000	1799999892000
269999970300000817000	1799999898000
269999972100000721000	1799999904000
269999973900000631000	1799999910000
269999975700000547000	1799999916000
269999977500000469000	1799999922000
269999979300000397000	1799999928000
269999981100000331000	1799999934000
269999982900000271000	1799999940000
269999984700000217000	1799999946000
269999986500000169000	1799999952000
269999988300000127000	1799999958000
269999990100000091000	1799999964000
269999991900000061000	1799999970000
269999993700000037000	1799999976000
269999995500000019000	1799999982000

3000000000, 3000000010, 3000000020, 3000000030, etc.; mais puisque nous voulons trouver les cubes des unités de la racine qui suivent immédiatement ceux du nombre 2999999980, il faut passer des dixaines aux unités.

Pour opérer cette transition, 1°. on avance une unité vers la droite, et l'on a pour racines 2999999980, 2999999981, 2999999982, 2999999983, 2999999984, 2999999985, etc.; 2°. on place sur la même ligne 2999999980, la racine,

26999999460000003599999992000, son cube; 3°. on multiplie 299999980, la racine cubique, par 6; 4°. on soustrait 6 de 17999999880, produit de cette multiplication, de manière que la soustraction de 6 soit faite sur le dernier chiffre: on obtient 17999999874, le terme de la progression génératrice sans aucun zéro, par la raison que 26999999981, la racine cubique suivante, n'est terminée par aucun zéro. Dans ce huitième cas, les termes de la progression génératrice correspondans à 299999980, 299999981, 299999982, 299999983, 299999984, 299999985, etc., etc., sont 17999999874, 17999999880, 17999999886, 17999999892, 17999999898, 17999999904, etc., etc.

Connaissant 299999980, la racine cubique, ... 26999999460000003599999992000, et 17999999874, le terme correspondant de la progression génératrice, tous trois placés sur la même ligne, nous cherchons, dans le huitième cas, où l'on descend des dixaines de la racine à ses unités, le terme de la suite des différences des cubes qui leur correspond, que nous trouvons d'après cette formule numérique, que nous avons déjà employée. Alors nous cherchons, 1°. le triple quarré de 299999980, qui est 269999996400000001200, et la triple racine, qui est 899999940; 2°. nous ôtons 899999940, la racine triplée, de 269999996400000001200, quarré triplé, pour avoir, en y ajoutant une unité, 269999996310000001261, le terme de la suite des différences des cubes.

Ensuite, nous plaçons sur la même ligne 299999980, la racine cubique, 26999999460000003599999992000, son cube, 269999996310000001261, le terme de la suite des différences des cubes, et 17999999874, le terme de la progression génératrice. Enfin, nous augmentons, à chaque addition faite comme ci-après, de 6 le dernier chiffre du terme de la progression génératrice. Ainsi, pour trouver le cube de 299999981, nous additionnons, 1°. 17999999880, le terme de la progression génératrice qui correspond à cette

racine cubique, et 269999996310000001261, le terme de la suite des différences des cubes; 2°. 269999996490000001141, la somme de cette addition, et..... 269999994600000035999999992000, cube de 2999999980, pour avoir 269999994870000032489999993141, cube de 2999999981. Pour trouver le cube de 2999999982, nous additionnons, 1°. 17999999886, le terme de la progression génératrice qui correspond à cette racine cubique, et... 269999996490000001141, le terme de la suite des différences des cubes; 2°. 269999996670000001027, la somme de cette addition, et 269999994870090032489999993141, cube de 2999999981, pour avoir 269999995140000029159999941681, cube de 2999999982.

Cette opération est facile à comprendre, pour peu qu'on examine la seizième suite du tableau deuxième, où l'on voit aussitôt la manière d'obtenir les termes de la progression génératrice et ceux de la suite des différences des cubes, deux séries qui concourent à former les cubes de la racine qui augmente d'unité en unité, où l'on voit comment la génération de ces mêmes cubes se fait.

SEIZIÈME SUITE

Formation des cubes des unités de la racine qui su

Racines.	Cubes.
2999999980	26999999460000035999999992000
2999999981	26999999487000032489999993141
2999999982	26999999514000029199999994168
2999999983	26999999541000025899999995087
2999999984	26999999568000022699999995904
2999999985	26999999595000019499999996625
2999999986	26999999622000016299999997256
2999999987	26999999649000013199999997803
2999999988	26999999676000009999999998272
2999999989	26999999703000006899999998669
2999999990	26999999730000003899999999000
2999999991	26999999757000000799999999271
2999999992	26999999784000002599999999488
2999999993	26999999811000005499999999657
2999999994	26999999838000008399999999784
2999999995	26999999865000011299999999875
2999999996	26999999892000014399999999936
2999999997	26999999919000017299999999973
2999999998	26999999946000020399999999992
2999999999	26999999973000023399999999999
3000000000	27000000000000000000000000000

Nous observons que, dans chaque transition des dixaines ascendantes ou descendantes dont on forme les cubes, si l'on désire connaître, à commencer depuis leurs dixaines les plus élevées, ou bien depuis leurs dixaines ascendantes ou

BLEAU DEUXIÈME.

médiatement ceux du nombre 299999980.

Différences.	Progression génératrice.
26999999631000001261	17999999874
26999999641000001141	17999999880
26999999651000001027	17999999886
26999999661000000919	17999999892
26999999671000000817	17999999898
26999999681000000721	17999999904
26999999691000000631	17999999910
26999999701000000547	17999999916
26999999711000000469	17999999922
26999999721000000397	17999999928
26999999731000000331	17999999934
26999999741000000271	17999999940
26999999751000000217	17999999946
26999999761000000169	17999999952
26999999771000000127	17999999958
26999999781000000091	17999999964
26999999791000000061	17999999970
26999999801000000037	17999999976
26999999811000000019	17999999982
26999999821000000007	17999999988
26999999831000000001	17999999994

descendantes, prises à volonté, pour finir jusques et compris leurs unités, leurs cubes successifs et leurs unités, il faut employer les règles de l'extraction des racines cubiques.

RÉCAPITULATION

Des seize articles compris dans les sections deuxième et troisième.

Cette récapitulation des seize articles compris dans les sections deuxième et troisième est partagée en deux parties. La première nous a fait connaître la méthode de trouver les termes de la progression génératrice et ceux de la suite des différences des cubes, pour former les cubes des dixaines ascendantes de la racine. La seconde nous fait connaître celle de trouver les termes de ces deux séries, pour former les cubes des dixaines descendantes de la racine exprimant un grand nombre.

PREMIÈRE PARTIE.

Récapitulation des huit articles de la section deuxième.

Premièrement, lorsque nous avons passé des unités de la racine 400 à ses dixaines, afin de trouver les termes de la progression génératrice qui nous sont absolument nécessaires pour opérer cette transition, et en même temps pour concourir à trouver les cubes de la racine qui croît de dixaine en dixaine, 1°. nous avons multiplié la même racine 400 par 6; 2°. soustrait 6 du produit 2400, de sorte que la soustraction de 6 soit faite sur le chiffre qui précède immédiatement le dernier; 3°. placé deux zéros à la suite du reste 2340, pour avoir 234000, le terme de la série, dont le nombre des zéros est triple de celui de 410, la racine suivante, et est bien propre à produire ce double résultat.

Secondement, lorsque nous avons passé des dixaines de la racine 600 à ses centaines, afin de trouver les termes de la progression génératrice qui nous sont absolument néces-

res pour opérer cette transition, et en même temps pour
ıcourir à trouver les cubes de la racine qui croît de cen-
ne en centaine, 1°. nous avons multiplié la même racine
) par 6; 2°. soustrait 6 du produit 3600, de sorte que
soustraction de 6 soit faite sur le chiffre qui précède
médiatement les deux derniers; 3°. et placé à la suite
reste 3000 quatre zéros, pour avoir 30000000, le terme
la série, dont le nombre des zéros est triple de celui
la racine suivante, et qui est bien propre à produire
double résultat.

Troisièmement, lorsque nous avons passé des centaines de
racine 3000 à ses mille, afin de trouver les termes de la
ogression génératrice qui nous sont absolument nécessaires
ur opérer cette transition, et en même temps pour con-
urir à trouver les cubes de la racine qui croît de mille en
ille, 1°. nous avons multiplié la même racine 3000 par 6;
soustrait 6 du produit 18000, de sorte que la soustrac-
n de 6 soit faite sur le chiffre qui précède immédia-
ment les trois derniers; 3°. placé à la suite du reste
000 six zéros, pour avoir 120000000000, le terme de la
ie, dont le nombre des zéros est triple de celui de la
cine suivante, et qui est bien propre à produire ce double
ultat.

Quatrièmement, lorsque nous avons passé des mille de
racine 27000 à ses dix mille, afin de trouver les termes
la progression génératrice qui nous sont absolument né-
saires pour opérer cette transition, et en même temps
ur concourir à trouver les cubes de la racine qui croît
dix mille en dix mille, 1°. nous avons multiplié la ra-
ıe 270000, augmentée d'un zéro, par 6; 2°. soustrait 6
produit 1620000, de sorte que la soustraction de 6 soit
te sur le chiffre qui précède immédiatement les quatre
rniers; 3°. placé à la suite du reste 1560000 huit zé-
s, pour avoir 15600000000000, le terme de la série,
nt le nombre des zéros est triple de celui de la racine

suivante, et qui est bien propre à produire ce double résultat.

Cinquièmement, lorsque nous avons passé des dix mille de la racine 460000 à ses cent mille, afin de trouver les termes de la progression génératrice qui nous sont absolument nécessaires pour opérer cette transition, et en même temps pour concourir à trouver les cubes de la racine qui croît de cent mille en cent mille, 1°. nous avons multiplié la racine 460000, augmentée d'un zéro, par 6; 2°. soustrait 6 du produit 27600000, de sorte que la soustraction de 6 soit faite sur le chiffre qui précède immédiatement les cinq derniers; 3°. placé à la suite du reste 27000000 dix zéros, pour avoir 27000000000000000, le terme de la série, dont le nombre des zéros est triple de celui de la racine suivante, et qui est bien propre à produire ce double résultat.

Sixièmement, lorsque nous avons passé des cent mille de la racine 6500000 à ses millions, afin de trouver les termes de la progression génératrice qui nous sont absolument nécessaires pour opérer cette transition, et en même temps pour concourir à trouver les cubes de la racine qui croît de million en million, 1°. nous avons multiplié la racine 65000000, augmentée d'un zéro, par 6; 2°. soustrait 6 du produit 390000000, de sorte que la soustraction de 6 soit faite sur le chiffre qui précède immédiatement les six derniers; 3°. placé à la suite du reste 384000000 douze zéros, pour avoir 384000000000000000000, le terme de la série, dont le nombre des zéros est triple de celui de la racine suivante, et qui est bien propre à produire ce double résultat.

Septièmement, lorsque nous avons passé des millions de la racine à ses dix millions, afin de trouver les termes de la progression génératrice qui nous sont absolument nécessaires pour opérer cette transition, et en même temps pour concourir à trouver les cubes de la racine qui croît de dix millions en dix millions, 1°. nous avons multiplié la racine 9000000 par 6; 2°. soustrait 6 du produit 54000000, de

sorte que la soustraction de 6 soit faite sur le chiffre qui précède immédiatement les sept derniers ; 3°. placé à la suite du reste 48000000 quatorze zéros, pour avoir..... 48000000000000000000000, le terme de la série, dont le nombre des zéros est triple de celui de la racine suivante, et qui est bien propre à produire ce double résultat.

Huitièmement, lorsque nous avons passé des dix millions de la racine 40000000 à ses cent millions, afin de trouver les termes de la progression génératrice qui nous sont absolument nécessaires pour opérer cette transition, et en même temps pour concourir à trouver les cubes de la racine qui croît de cent millions en cent millions, 1°. nous avons multiplié la racine 40000000 par 6 ; 2°. soustrait 6 du produit 240000000, de sorte que la soustraction de 6 soit faite sur le chiffre qui précède immédiatement les huit derniers ; 3°. placé à la suite du reste 1800000000 seize zéros, pour avoir 1800000000000000000000000, le terme de la série, dont le nombre des zéros est triple de celui de la racine suivante, et qui est bien propre à produire ce double résultat.

Nous observons que ces huit numéros montrent combien il est aisé de trouver, lorsqu'on passe d'une dixaine à une autre immédiatement supérieure, les termes de la progression génératrice, puisqu'il suffit de multiplier la racine par 6, de soustraire 6 du produit, de manière que la soustraction de 6 soit faite sur le chiffre qui précède un nombre de chiffres égal à celui des transitions, et d'avoir soin que le reste ait un nombre de zéros triple de celui de la racine suivante. Chaque terme de la série doit être augmenté de 6 à chaque opération, pour trouver les cubes des racines correspondantes.

Maintenant, nous cherchons à connaître les termes de la suite des différences des cubes qui concourent, avec chacun des termes des précédentes séries, à former les cubes des racines correspondantes.

1°. Nous avons obtenu, dans la transition des unités de la racine 310 à ses dixaines, 279000, le terme de la suite des différences des cubes, en soustrayant l'un de l'autre les cubes des deux dernières dixaines, c'est-à-dire 27000000, cube de 300, de 29791000, cube de 310, lequel coopère à nous faire trouver les cubes de la même racine croissante de dixaine en dixaine.

2°. Nous avons obtenu, dans la transition des dixaines de la racine 600 à ses centaines, 91000000, le terme de la suite des différences des cubes, en soustrayant l'un de l'autre les cubes des deux dernières dixaines, lesquelles sont effectivement les deux dernières centaines de la racine, c'est-à-dire 125000000, cube de 500, de 216000000, cube de 600. Ce terme coopère à nous faire trouver les cubes de la même racine croissante de centaine en centaine.

3°. Nous avons obtenu, dans la transition des centaines de la racine 3000 à ses mille, 19000000000, le terme de la suite des différences des cubes, en soustrayant l'un de l'autre les cubes des deux dernières dixaines, lesquelles sont effectivement les deux dernières mille unités de la racine, c'est-à-dire 8000000000, cube de 2000, de 27000000000, cube de 3000. Ce terme coopère à nous faire trouver les cubes de la même racine croissante de mille en mille.

4°. Comme nous avons passé des mille de la racine 27000 à ses dix mille, alors nous avons mis à la suite un zéro et trois zéros à son cube, et nous avons obtenu, dans la transition des mille de la racine à 270000, ses dix mille, ... 2107000000000000, le terme de la suite des différences des cubes, en soustrayant l'un de l'autre les cubes des deux dernières dixaines, qui en sont effectivement les deux dernières dix mille unités de la racine, c'est-à-dire 1756000000000000, cube de 260000, de 19683000000000000, cube de 270000. Ce terme coopère à nous faire trouver les cubes de la même racine croissante de dix mille en dix mille.

5°. Nous avons passé des dix mille de la racine 460000 à

ses cent mille, alors nous avons mis à la suite un zéro et trois zéros à son cube, et nous avons obtenu, dans la transition des dix mille de la racine à 4600000, ses cent mille, 6211000000000000000, le terme de la suite des différences des cubes des deux dernières racines, qui en sont effectivement les deux dernières cent mille unités de la racine, c'est-à-dire 91125000000000000000, cube de 4500000, de 97336000000000000000, cube de 4600000. Ce terme coopère à nous faire trouver les cubes de la même racine croissante de cent mille en cent mille.

6°. Nous avons passé des cent mille de la racine 6500000 à ses millions, alors nous avons mis à la suite un zéro et trois zéros à son cube, et nous avons obtenu, dans la transition des cent mille de la racine à 6500000, ses millions, 1248100000000000000000, le terme de la suite des différences des cubes, en soustrayant l'un de l'autre les cubes des deux dernières racines, qui en sont effectivement les deux dernières millionièmes unités, c'est-à-dire.....
262144000000000000000000, cube de 6400000, de.....
274625000000000000000000, cube de 6500000. Ce terme coopère à nous faire trouver les cubes de la racine croissante de million en million.

Nous observons que nous avons obtenu les termes de la suite des différences des cubes dans les articles 4, 5 et 6, en soustrayant l'un de l'autre les cubes des deux dernières racines, au lieu des deux dernières dixaines de la la racine, par la raison que, pour opérer plus facilement, nous avons élevé chaque racine à une dixaine supérieure, en ajoutant un zéro à chacune d'elles et trois zéros à leurs cubes.

7°. Nous avons obtenu, dans la transition des millions de la racine 90000000 à ses dix millions,.....
217000000000000000000000, le terme de la suite des différences des cubes, en soustrayant l'un de l'autre les cubes des deux dernières dixaines de la racine, qui en sont effecti-

vement les deux dernières dix-millionièmes unités, c'est-à-dire 512000000000000000000000, cube de 80000000, de 729000000000000000000000, cube de 90000000. Ce terme coopère à nous faire trouver les cubes de la même racine croissante de dix millions en dix millions.

8°. Nous avons obtenu, dans la transition des dix millions de la racine 400000000 à ses cent millions, ... 370000000000000000000000000, le terme de la suite des différences des cubes, en soustrayant l'un de l'autre les cubes des deux dernières dixaines de la racine, qui en sont effectivement les deux dernières cent-millionièmes unités, c'est-à-dire 270000000000000000000000000, cube de 300000000, de 640000000000000000000000000, cube de 400000000. Ce terme coopère à nous faire trouver les cubes de la même racine croissante de cent millions en cent millions.

Les élémens que nous avons donnés pour trouver les termes de la progression génératrice et ceux de la suite des différences des cubes, tous deux correspondans aux dixaines successivement ascendantes de la racine, sont infaillibles; ils peuvent nous faire connaître tous les termes possibles de ces deux séries, lesquels, étant consécutivement additionnés, forment les cubes des plus grands nombres qui s'approchent de plus en plus de l'infini.

DEUXIÈME PARTIE.

Récapitulation des huit articles de la section troisième.

Lorsque nous formons les cubes des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., etc., nous employons uniquement l'addition; cette règle est suffisante pour trouver les cubes de la racine qui augmente d'unité en unité, de dixaine en dixaine, de centaine en centaine, de mille en mille, de dix mille en dix mille, de cent mille en cent mille, de million en million, etc. Mais lorsque nous passons d'une dixaine à une autre immédiatement supérieure, ou à une autre immédia-

tement inférieure, nous nous servons, dans l'un et l'autre cas, de la multiplication et de la soustraction. Nous avons vu la manière de nous en servir dans les huit articles de la section deuxième, concernant les dixaines ascendantes qui se rapprochent de plus en plus de l'infini. Nous avons vu aussi la manière de nous en servir dans les huit articles de la section troisième, concernant les dixaines descendantes de la racine qui se dirigent vers ses unités. A l'égard de ces dernières, nous allons récapituler les règles qui nous font trouver les termes de la progression génératrice et ceux de la suite des différences des cubes, termes des deux séries qui nous sont absolument nécessaires pour passer d'une dixaine à une autre immédiatement inférieure.

Premièrement, pour trouver le terme de la progression génératrice qui coopère à la transition des cent millions de la racine 2800000000 à ses dix millions, et par suite concourt à la formation des cubes de la racine qui augmente de dix millions en dix millions, 1°. on avance une dixaine vers la droite, et l'on a 2800000000, 2810000000, 2820000000, etc.; 2°. on multiplie la racine 2800000000 par 6; 3°. on soustrait 6 du produit 16800000000, de manière que la soustraction de 6 se fait sur le chiffre qui précède immédiatement les sept derniers, pour avoir le reste 1674000000; 4°. on met à la suite du produit restant un nombre de zéros triple de celui de 2810000000, la racine suivante. Ainsi, les termes de la série correspondans aux racines 2800000000, 2810000000, 2820000000, etc., sont..... 1674000000000000000000000, 1680000000000000000000000, 1686000000000000000000000, etc.

Secondement, pour trouver le terme de la progression génératrice qui coopère à la transition des dix millions de la racine 2980000000 à ses millions, et par suite concourt à la formation des cubes de la racine qui augmente de million en million, 1°. on avance une dixaine vers la droite, et l'on a 29800000000, 29810000000, 29820000000, etc.; 2°. on multi-

plie la racine 2980000000 par 6; 3°. on soustrait 6 du produit 17880000000, de manière que la soustraction de 6 se fait sur le chiffre qui précède immédiatement les six derniers, pour avoir le reste 17874000000; 4°. on met à la suite du produit restant un nombre de zéros triple de celui de 2981000000, la racine suivante. Ainsi, les termes de la série correspondans aux racines 2980000000,..... 2981000000, 2982000000, etc., sont..... 17874000000000000000000, 17880000000000000000000, 17886000000000000000000, etc.

Troisièmement, pour trouver le terme de la progression génératrice qui coopère à la transition des millions de la racine 2998000000 à ses cent mille, et par suite concourt à la formation des cubes de la racine qui augmente de cent mille en cent mille, 1°. on avance une dixaine vers la droite, et l'on a 2998000000, 2998100000, 2998200000, etc. 2°. on multiplie la racine 2998000000 par 6; 3°. on soustrait 6 du produit 17988000000, de manière que la soustraction de 6 se fait sur le chiffre qui précède immédiatement les cinq derniers, pour avoir le reste 17987400000; 4°. on met à la suite du produit restant un nombre de zéros triple de celui de 2998100000, la racine suivante. Ainsi, les termes de la série correspondans aux racines 2998000000,..... 2998100000, 2998200000, etc., sont..... 17987400000000000000, 17988000000000000000,..... 17988600000000000000, etc.

Quatrièmement, pour trouver le terme de la progression génératrice qui coopère à la transition des cent mille de la racine 2999800000 à ses dix mille, et par suite concourt à la formation des cubes de la racine qui augmente de dix mille en dix mille, 1°. on avance une dixaine vers la droite, et l'on a 2999800000, 2999810000,..... 2999820000, etc.; 2°. on multiplie la racine 2999800000 par 6; 3°. on soustrait 6 du produit 17998800000, de manière que la soustraction de 6 se fait sur le chiffre qui

précède immédiatement les quatre derniers, pour avoir le reste 1799874oooo; 4°. on met à la suite du produit restant un nombre de zéros triple de celui de 2999810000, la racine suivante. Ainsi, les termes de la série correspondans aux racines 2999800000, 2999810000,..... 2999820000, etc., sont 17998740000000000000,..... 17998800000000000000, 17998860000000000000, etc.

Cinquièmement, pour trouver le terme de la progression génératrice qui coopère à la transition des dix mille de la racine 2999980000 à ses mille, et par suite concourt à la formation des cubes de la racine qui augmente de mille en mille, 1°. on avance une dixaine vers la droite, et l'on a 2999980000, 2999981000, 2999982000, etc.; 2°. on multiplie la racine 2999980000 par 6; 3°. on soustrait 6 du produit 17999880000, de manière que la soustraction de 6 se fait sur le chiffre qui précède immédiatement les trois derniers, pour avoir le reste 1799987400o; 4°. on met à la suite du produit restant un nombre de zéros triple de celui de 2999981000, la racine suivante. Ainsi, les termes de la série correspondans aux racines 2999980000,..... 2999981000, 2999982000, etc., sont 1799987400000000000, 17999880000000000000, 17999886000000000000, etc.

Sixièmement, pour trouver le terme de la progression génératrice qui coopère à la transition des mille de la racine 2999998000 à ses centaines, et par suite concourt à la formation des cubes de la racine qui augmente de centaine en centaine, 1°. on avance une dixaine vers la droite, et l'on a 2999998000, 2999998100, 2999998200, etc.; 2°. on multiplie la racine 2999998000 par 6; 3°. on soustrait 6 du produit 17999988000, de manière que la soustraction de 6 se fait sur le chiffre qui précède immédiatement les deux derniers, pour avoir le reste 1799998740o; 4°. on met à la suite du produit restant un nombre de zéros triple de celui de 2999998100, la racine suivante. Ainsi, les termes de la série correspondans à 2999998000,

2999998100, 2999998200, etc., sont 1799998740000000, 1799998800000000, 1799998860000000, etc.

Septièmement, pour trouver le terme de la progression génératrice qui coopère à la transition des centaines de la racine 2999999800 à ses dixaines, et par suite concourt à la formation des cubes de la racine qui augmente de dixaine en dixaine, 1°. on avance une dixaine vers la droite, et l'on a 2999999800, 2999999810, 2999999820, etc.; 2°. on multiplie la racine 2999999800 par 6; 3°. on soustrait 6 du produit 17999998800, de manière que la soustraction de 6 se fait sur le chiffre qui précède immédiatement le dernier, pour avoir le reste 17999998740; 4°. on met à la suite du produit restant un nombre de zéros triple de celui de 2999999810, la racine suivante. Ainsi, les termes de la série correspondans à 2999999800, 2999999810,..... 2999999820, etc., sont 17999998740000, 17999998800000, 17999998860000, etc.

Huitièmement, pour trouver le terme de la progression génératrice qui coopère à la transition des dixaines de la racine 2999999980 à ses unités, et par suite concourt à la formation des cubes de la racine qui augmente d'unité en unité, 1°. on avance une dixaine vers la droite, et l'on a 2999999980, 2999999981, 2999999982, etc.; 2°. on multiplie la racine 2999999980 par 6; 3°. on soustrait 6 du produit 17999999880, de manière que la soustraction de 6 se fait sur le dernier chiffre, pour avoir 17999999874 sans zéros, parce que 2999999981, la racine suivante, n'en a point. Ainsi, les termes de la série correspondans à 2999999980, 2999999981, 2999999982, etc., sont 17999999874,..... 17999999880, 17999999886, etc.

Puisque chaque terme de la suite des différences des cubes égale trois fois le quarré de chaque racine correspondante, moins trois fois cette même racine, plus un, et puisque cette formule numérique est générale, nous l'avons employée utilement dans la section troisième, pour en faire sentir la pré-

cision et la justesse. Nous allons de suite l'appliquer dans les huit numéros de cette section troisième.

1°. Pour trouver le terme de la suite des différences des cubes correspondant à 280, la racine cubique, nous avons obtenu 235200, le quarré triplé; soustrait 840, la racine triplée, de 235200, le quarré triplé, pour avoir, plus 1; 234361, le terme de la suite des différences des cubes, suivi de 21 zéros.

2°. Pour trouver le terme de la suite des différences des cubes correspondant à 2980, la racine cubique, nous avons obtenu 26641200, le quarré triplé; soustrait 8940, la racine triplée, de 26641200, le quarré triplé, pour avoir, plus 1, 26632261, le terme de la suite des différences des cubes, suivi de 18 zéros.

3°. Pour trouver le terme de la suite des différences des cubes correspondant à 29980, la racine cubique, nous avons obtenu 2696401200, le quarré triplé; soustrait 89940, la racine triplée, de 2696401200, le quarré triplé, pour avoir, plus 1, 2696311261, le terme de la suite des différences des cubes, suivi de 15 zéros.

4°. Pour trouver le terme de la suite des différences des cubes correspondant à 299980, la racine cubique, nous avons obtenu 269964001200, le quarré triplé; soustrait... 899940, la racine triplée, de 269964001200, le quarré triplé, pour avoir, plus 1, 269963101261, le terme de la suite des cubes, suivi de 12 zéros.

5°. Pour trouver le terme de la suite des différences des cubes correspondant à 2999980, la racine cubique, nous avons obtenu 269999640001200, le quarré triplé; soustrait 8999940, la racine triplée, de 269999640001200, quarré triplé, pour avoir, plus 1, 269996310001261, le terme de la suite des différences des cubes, suivi de 9 zéros.

6°. Pour trouver le terme de la suite des différences des cubes correspondant à 29999980, la racine cubique, nous avons obtenu 2699996400001200, le quarré triplé; sous-

trait 89999940, la racine triplée, de 269999640000001200, quarré triplé, pour avoir, plus 1, 269999631000012601, le terme de la suite des différences des cubes, suivi de 6 zéros.

7°. Pour trouver le terme de la suite des différences des cubes correspondant à 299999980, la racine cubique, nous avons obtenu 269999964000001200, le quarré triplé; soustrait 899999940, la racine triplée, de 269999964000000120, quarré triplé, pour avoir, plus 1, 269999963100001261, le terme de la suite des différences des cubes, suivi de 3 zéros.

8°. Pour trouver le terme de la suite des différences des cubes correspondant à 2999999980, la racine cubique, nous avons obtenu 26999999640000001200, le quarré triplé; soustrait 8999999940, la racine triplée, de..... 26999999640000001200, pour avoir, plus 1,..... 26999999631000001261, le terme de la suite des différences des cubes.

Nous observons que, pouvant trouver chaque terme de la suite des différences des cubes qui coopère à obtenir chaque cube des dixaines descendantes de la racine vers ses unités conformément à notre formule précitée, nous pouvons aussi les avoir facilement de la manière suivante.

1°. Nous multiplions 1674, le terme de la progression génératrice correspondant à la racine 2800000000 et à son cube, par 140, la moitié de 280, pour avoir le produit 234360, auquel nous ajoutons une unité, et puis nous joignons 21 zéros, triple de ceux de 2810000000, la racine suivante, ce qui complète 234361000000000000000000000, le terme de la suite des différences des cubes qui concourt à nous faire descendre des cent millions de la racine à ses dix millions, et à avoir les cubes de la racine qui croît de dix millions en dix millions.

2°. Nous multiplions 17874, le terme de la progression génératrice correspondant à la racine 2980000000 et à son cube, par 1490, la moitié de 2980, pour avoir le produit

26632260, auquel nous ajoutons une unité, et puis nous joignons 18 zéros, triple de ceux de 2981000000, la racine suivante, ce qui complète 2663226100000000000000000, le terme de la suite des différences des cubes qui concourt à nous faire descendre des dix millions de la racine à ses millions, et à avoir les cubes de la racine qui croît de million en million.

3°. Nous multiplions 179874, le terme de la progression génératrice correspondant à la racine 2998000000 et à son cube, par 14990, la moitié de 29980, pour avoir le produit 26963111260, auquel nous ajoutons une unité, et puis nous joignons quinze zéros, triple de ceux de 2998100000, la racine suivante, ce qui complète..... 26963112610000000000000000, le terme de la suite des différences des cubes qui concourt à nous faire descendre des millions de la racine à ses cent mille, et à avoir les cubes de la racine qui croît de cent mille en cent mille.

4°. Nous multiplions 1799874, le terme de la progression génératrice correspondant à la racine 2999800000 et à son cube, par 149990, la moitié de 299980, pour avoir le produit 26996310126o, auquel nous ajoutons une unité, et puis nous joignons douze zéros, triple de ceux de.... 2999810000, la racine suivante, ce qui complète..... 26996310126100000000000000, le terme de la suite des différences des cubes qui concourt à nous faire descendre des cent mille de la racine à ses dix mille, et à avoir les cubes de la racine qui croît de dix mille en dix mille.

5°. Nous multiplions 17999874, le terme de la progression génératrice correspondant à la racine 2999980000 et à son cube, par 1499990, la moitié de 2999980, pour avoir le produit 269996310012600, auquel nous ajoutons une unité, et puis nous joignons neuf zéros, triple de ceux de..... 2999981000, la racine suivante, ce qui complète..... 26999631001261000000000, le terme de la suite des différences des cubes qui concourt à nous faire descendre des

dix mille de la racine à ses mille, et à avoir les cubes de la racine qui croît de mille en mille.

6°. Nous multiplions 1799998 74, le terme de la progression génératrice correspondant à la racine 2999998000 et à son cube, par 14999990, la moitié de 29999980, pour avoir le produit 2699996310001260, auquel nous ajoutons une unité, et puis nous joignons six zéros, triple de ceux de 2999998100, la racine suivante, ce qui complète..... 2699996310001261000000, le terme de la suite des différences des cubes qui concourt à nous faire descendre des mille de la racine à ses centaines, et à avoir les cubes de la racine qui croît de centaine en centaine.

7°. Nous multiplions 17999998 74, le terme de la progression génératrice correspondant à la racine 2999999800 et à son cube, par 14999999 0, la moitié de 29999998 0, pour avoir le produit 2699999631000012 60, auquel nous ajoutons une unité, et puis nous joignons trois zéros, triple de celui de 2999999810, la racine suivante, ce qui complète..... 2699999631000012 61000, le terme de la suite des différences des cubes qui concourt à nous faire descendre des centaines de la racine à ses dixaines, et à avoir les cubes de la racine qui croît de dixaine en dixaine.

8°. Nous multiplions 17999999874, le terme de la progression génératrice correspondant à la racine 2999999980 et à son cube, par 14999999990, la moitié de 2999999980, pour avoir le produit 26999999631000001260, auquel nous ajoutons une unité, sans y joindre aucun zéro, parce que 2999999981, la racine suivante, n'en a point. Ainsi,..... 26999999631000001261 est le terme de la suite des différences des cubes qui concourt à nous faire descendre des dixaines de la racine à ses unités, et à avoir les cubes de la racine qui croît d'unité en unité.

Nous observons que cette seconde manière de trouver les différences des cubes des dixaines descendantes de la racine, est bien applicable à l'extraction de la racine cubique.

QUATRIÈME SECTION.

Preuve facile et sûre pour nous faire connaître les vrais cubes des racines correspondantes.

D'abord nous avons fait la colonne des racines cubiques, ensuite celle des termes de la progression génératrice, qui est une progression arithmétique croissante, dont la différence constante est 6, et dont chaque terme, est, moins 6, le produit de chaque racine correspondante par 6. Ainsi, en faisant cette série, nous avons multiplié de temps en temps, afin d'éviter l'erreur, les chiffres de quelques racines correspondantes qui expriment des quantités numériques, par 6, et nous avons vu si le terme de la progression obtenu par l'addition égalait, moins 6, le produit que nous avons eu. De cette manière, nous avons reconnu l'exactitude ou l'erreur.

Ensuite, nous avons additionné successivement l'unité et les termes de la progression génératrice, pour composer les termes de la suite des différences des cubes, dont la différence entre eux est variable, et dont chaque terme égale le triple quarré de la racine correspondante et suivie d'un seul zéro, moins la même racine triplée, plus 1. Si chacun d'eux n'est pas conforme à cette formule numérique, alors l'erreur existe; il faut recommencer l'addition jusqu'à ce qu'elle ait disparu.

Enfin, l'addition faite sans interruption des termes de la suite des différences des cubes forme les cubes des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., etc. On examine, à chaque dixaine de la racine, si les chiffres du cube trouvé, abstraction faite des trois zéros, sont les mêmes que ceux du cube de la dixaine antérieure de la racine. S'ils sont les mêmes, l'opération est bien faite; alors les cubes intermédiaires sont exactement ceux des racines correspondantes.

Si au contraire ils sont différens, l'opération est mal f
Dans ce cas, nous avons rectifié l'erreur, jusqu'à ce
nous ayons trouvé, en additionnant, les mêmes chi
dans les cubes comparés des deux dixaines de la ra
Les exemples suivans, qui sont l'application de cette
rité arithmétique, seront une preuve sensible et incon
table de la facilité avec laquelle on parvient à conn
si l'on a bien ou mal additionné.

Les chiffres de 2197000, cube de 130, abstraction f
des trois zéros, étant les mêmes que 2197, cube de 13
peut juger avec raison que 2197000 est vraiment le c
de 130, et même on a la certitude que tous les cubes
termédiaires sont exactement ceux des racines corresp
dantes.

Les chiffres de 8000000, cube de 200, étant les mêm
abstraction faite des six zéros, que 8, cube de 2, on a
certitude que tous les cubes intermédiaires sont vraim
ceux des racines correspondantes.

Les chiffres de 29791000, cube de 310, abstraction f
des trois zéros, étant les mêmes que 29791, cube de 31,
est certain que 29791000 est le cube de 310, et que t
les cubes intermédiaires sont vraiment ceux des raci
correspondantes.

Ce que nous disons de ces cubes est applicable à t
autres. Si les racines ne diffèrent que par leurs zér
pareillement, les cubes ne doivent différer que par le
zéros.

Ces comparaisons que nous avons successivement faite
soit lorsque nous cherchions les cubes des dixaines asce
dantes de la racine qui s'élève à de grands nombres, et ai
se rapproche de l'infini, soit lorsque nous cherchions
cubes des dixaines descendantes de la racine qui se ra
proche de plus en plus de ses unités, ces comparaison
disons-nous, ont été autant de vérifications pour nous a
surer si nous avions bien ou mal additionné.

En effet, les cubes des racines croissantes d'unité en unité du tableau deuxième, calculés jusques et compris 400, nous ont servi de comparaison pour faire les première, deuxième, troisième, quatrième, cinquième, sixième, septième, huitième et neuvième suites du tableau deuxième.

Comme nous avons cherché le cube de trois milliards, dont le calcul est compris dans le tableau deuxième et les seizièmes suites du même tableau, nous avons vérifié les dixième, onzième, douzième, treizième, quatorzième, quinzième et seizième suites du tableau deuxième, en les comparant successivement aux neuvième, dixième, onzième, douzième, treizième, quatorzième et quinzième suites continuées du même tableau, puisque la neuvième suite continuée, qui comprend la formation des cubes des dix millions de la racine, sert à vérifier ceux de la racine compris dans la dixième suite, où elle augmente de million en million; la dixième suite continuée, qui comprend la formation des cubes des millions de la racine, sert à vérifier ceux de la racine compris dans la onzième suite, où elle augmente de cent mille en cent mille; la onzième suite continuée, qui comprend la formation des cubes des cent mille de la racine, sert à vérifier ceux de la racine compris dans la douzième suite, où elle augmente de dix mille en dix mille; la douzième suite continuée, qui comprend la formation des cubes des dix mille de la racine, sert à vérifier ceux de la racine compris dans la treizième suite, où elle augmente de mille en mille; la treizième suite continuée, qui comprend la formation des cubes des mille de la racine, sert à vérifier ceux de la racine compris dans la quatorzième suite, où elle augmente de centaine en centaine; la quatorzième suite continuée, qui comprend la formation des cubes des centaines de la racine, sert à vérifier ceux de la racine compris dans la quinzième suite, où elle augmente de dixaine en dixaine; la quinzième suite continuée, qui comprend la formation des cubes des dixaines de la

racine, sert à vérifier ceux de la racine compris dans l
seizième suite, où elle augmente d'unité en unité.

Quand la neuvième suite continuée, qui comprend l
formation des cubes des dix millions de la racine, sert
vérifier ceux compris dans la dixième suite, où la racin
augmente de million en million, alors ce mode de vérifi-
cation est d'autant plus aisé et plus intelligible pour la so-
lidité de cette comparaison, qu'il suffit que chaque cube
de la neuvième suite, où la racine croît de dix millions en
dix millions, soit égal à chaque dixaine de cubes de la

Sept tableaux comparatifs destinés à vé

Racines.	Cubes.
Neuvième suite continuée des cubes des dix millions de la	
2980000000	26463592000000000000000000000
2990000000	26730899000000000000000000000
3000000000	27000000000000000000000000000
Dixième suite continuée des cubes des millions de la racine,	
2998000000	26946035992000000000000000000
2999000000	26973008999000000000000000000
3000000000	27000000000000000000000000000
Onzième suite continuée des cubes des cent mille de la racin	
2999800000	26994600359992000000000000000
2999900000	26997300089999000000000000000
3000000000	27000000000000000000000000000
Douzième suite continuée des cubes des dix mille de la	
2999980000	26999460003599992000000000000
2999990000	26999730000899999000000000000
3000000000	27000000000000000000000000000

dixième suite, où la racine croît seulement de million en million. Ce que nous disons de la neuvième suite, comparativement à la dixième, est applicable à toutes les autres suites du tableau deuxième.

Si les cubes des dixaines de la racine sont exacts, aussi les cubes des racines intermédiaires sont pareillement exacts, par la raison que les termes de la progression génératrice et ceux de la suite des différences des cubes sont deux séries qui ont la propriété immuable de former exactement les cubes de toutes les racines quelconques.

ept dernières suites du tableau deuxième.

Différences des cubes.	Progression génératrice.
t à vérifier ceux de la racine qui croît de million en million.	
19000000000000000000000	1782000000000000000000000
7000000000000000000000	1788000000000000000000000
1000000000000000000000	1794000000000000000000000
ier ceux de la racine qui croît de cent mille en cent mille.	
019000000000000000000	17982000000000000000000
007000000000000000000	17988000000000000000000
001000000000000000000	17994000000000000000000
vérifier ceux de la racine qui croît de dix mille en dix mille.	
5001900000000000000	179982000000000000000
3000700000000000000	179988000000000000000
1000100000000000000	179994000000000000000
à vérifier ceux de la racine qui croît de mille en mille.	
55000190000000000000	1799982000000000000
73000070000000000000	1799988000000000000
91000010000000000000	1799994000000000000

Racines.	Cubes.
Treizième suite continuée des cubes des mille de la racine, se	
2999998000	26999946000035999992000000000
2999999000	26999973000008999999000000000
3000000000	27000000000000000000000000000
Quatorzième suite continuée des cubes des centaines de la ra	
2999999800	2699999460000359999992000000
2999999900	2699999730000089999999000000
3000000000	2700000000000000000000000000
Quinzième suite continuée des cubes des dixaines de la r	
2999999980	269999994600000359999999200
2999999990	269999997300000089999999900
3000000000	270000000000000000000000000

Différences des cubes.	Progression génératrice.
érifier ceux de la racine qui croît de centaine en centaine.	
269999550000019000000000	17999982000000000
269999973000000700000000	17999988000000000
269999991000001000000000	17999994000000000
vant à vérifier ceux de la racine qui croît de dixaine en dixaine.	
26999999550000019000000	1799999820000000
26999999730000007000000	1799999880000000
26999999910000001000000	1799999940000000
vant à vérifier ceux de la racine qui croît d'unité en unité.	
269999999550000001900000	179999998200000
269999999730000000700000	179999998800000
269999999910000000100000	179999999400000

CHAPITRE DEUXIÈME.

PREMIÈRE SECTION.

De l'extraction de la racine cubique.

Nous avons dit que la méthode qui nous apprend à trouver les cubes des dixaines descendantes de la racine, ainsi que ceux de ses unités, sert aussi à trouver les racines cubiques d'un nombre; mais, afin de connaître et d'apprécier leur utilité, il est bon de savoir que la formation du cube de chaque dixaine descendante de la racine et l'extraction de la racine cubique d'un nombre quelconque ont beaucoup de corrélation, puisque les principes dont nous nous servirons à l'égard des deux, pour trouver les termes de la progression génératrice et ceux de la suite des différences des cubes, seraient absolument les mêmes, si chaque racine, dans l'une et l'autre, avait, en commençant chaque opération, autant de chiffres, dont les uns expriment des quantités numériques, et les autres sont des zéros, que le nombre sur lequel nous devons opérer a de tranches.

Mais, comme on cherche la racine cubique de la première, des deux premières, des trois premières, des quatre premières, etc., tranches, alors la racine prend successivement un chiffre, deux chiffres, trois chiffres, quatre chiffres, etc. Cette manière d'extraction est cause que la soustraction de 6 se fait toujours sur le dernier chiffre du produit, pour obtenir le terme de la progression génératrice, et que l'unité doit être ajoutée au dernier chiffre du reste qui émane de la soustraction de la racine triplée, de son quarré triplé, pour

trouver le terme de la suite des différences des cubes, lequel égale toujours le quarré triplé de la racine correspondante, moins cette même racine triplée, plus 1. Cette formule, qui nous paraît la plus simple, nous servira désormais pour l'extraction de la racine cubique. Cette manière d'extraction, disons-nous, est assez facile, et nous conduit aux mêmes résultats que celle qui nous fait trouver les cubes des dixaines descendantes de la racine.

Après avoir trouvé les cubes des dixaines ascendantes de la racine 2800000000, nous avons cherché les cubes des dixaines descendantes jusqu'à ses unités de la racine.... 2800000000, laquelle, additionnée avec la première, fait 3000000000, dont le cube est..... 27000000000000000000000000000. Ce grand nombre, étant extrait selon les règles que nous avons modifiées, reproduirait la même racine.

Avant de faire l'application des règles qui, quoique modifiées, nous font trouver aussi facilement que sûrement les termes de la progression génératrice et ceux de la suite des différences des cubes qui nous sont absolument nécessaires pour extraire la racine cubique d'un nombre donné, nous disons que les chiffres des racines et de leurs cubes, à mesure que leur grandeur numérique augmente, se placent de gauche à droite, et décroissent dans ce sens en raison sous-décuple; mais que les chiffres des racines et de leurs cubes, considérés de droite à gauche, croissent en raison décuple.

Il est généralement connu, et il demeure pour constant, que le nombre des chiffres des racines est, par rapport à celui de leurs cubes, comme 1 est à 3, puisque les opérations, faites relativement à chaque cube, ont constamment donné cette proportion, et puisque tout nombre exprimé par trois chiffres qui ont la plus grande valeur numérique, comme 999, a pour racine le seul chiffre 9, et que tout nombre exprimé par quatre chiffres qui ont la plus petite valeur numérique, comme 1000, a pour racine les deux chiffres 10.

Or, parce que les chiffres des racines et de leurs cubes, à mesure que leur grandeur numérique augmente, se placent de gauche à droite, et que les racines sont, par rapport à leurs cubes, comme 1 est à 3, aussi, il nous paraît évident qu'il faut partager le nombre à extraire, de droite à gauche, par tranches de trois chiffres en trois chiffres, en sorte que la tranche le plus à gauche peut n'avoir que deux chiffres, ou même qu'un seul.

Comme nous commençons à extraire la racine cubique de la tranche le plus à gauche, ensuite, nous continuons l'extraction des autres qui se succèdent immédiatement; nous la nommons *première tranche;* les suivantes, *deuxième, troisième, quatrième, cinquième, sixième,* etc., *tranches.*

Lorsqu'un nombre est partagé de la sorte, et ses divisions connues sous ces diverses dénominations, lorsqu'on a extrait la racine du cube le plus approchant de la première tranche, nous cherchons celle qui résulte des deux premières tranches, des trois premières tranches, des quatre premières tranches, des cinq premières tranches, des six premières tranches, etc. Afin de connaître la racine qui appartient à chaque division, il faut obtenir successivement le terme de la progression génératrice et celui de la différence des cubes propre à nous faire trouver le plus grand cube de chacune d'elles.

1°. Nous obtenons le terme de la progression génératrice qui concourt à nous faire trouver le plus grand cube des deux premières tranches en mettant après la racine cubique qui provient de la première tranche un zéro, qui restera ou sera remplacé par un autre chiffre, ainsi qu'on le verra dans la suite de nos calculs; en multipliant la racine cubique, augmentée d'un zéro, par 6; en soustrayant 6 du dernier chiffre du produit de cette multiplication, pour avoir le terme de la progression génératrice correspondant à cette même racine, suivie d'un zéro. 2°. Nous obtenons le terme de la suite des différences des cubes qui coopère à nous faire

avoir le plus grand cube des deux premières tranches en élevant la racine cubique, suivie d'un zéro, à son quarré, que nous triplons; en ôtant la même racine triplée du quarré triplé, pour avoir, plus 1, le terme de la suite des différences des cubes correspondant aussi à cette même racine, suivie d'un zéro. 3°. Nous plaçons sur la même ligne la racine cubique, accompagnée d'un zéro, son cube, accompagné de trois zéros, le terme de la suite des différences des cubes et le terme de la progression génératrice. 4°. Nous additionnons comme à l'ordinaire, et nous augmentons, à chaque addition, de 6 le dernier chiffre du terme de la progression génératrice, jusqu'à ce que nous ayons trouvé le plus grand cube des deux premières tranches.

1°. Nous obtenons le terme de la progression génératrice qui concourt à nous faire trouver le plus grand cube des trois premières tranches en mettant après la racine cubique qui provient des deux premières tranches un zéro, qui restera ou sera remplacé par un autre chiffre, ainsi qu'on le verra dans la suite de nos calculs; en multipliant la racine cubique, augmentée d'un zéro, par 6; en soustrayant 6 du dernier chiffre du produit de cette multiplication, pour avoir le terme de la progression génératrice correspondant à la racine qui provient des deux premières tranches, et qui est suivie d'un zéro. 2°. Nous obtenons le terme de la suite des différences des cubes qui coopère à nous faire avoir le plus grand cube des trois premières tranches en élevant la racine cubique, suivie d'un zéro, à son quarré, que nous triplons; en ôtant la même racine triplée de son quarré triplé, pour avoir, plus 1, le terme de la suite des différences des cubes correspondant aussi à cette même racine, suivie d'un zéro. 3°. Nous plaçons sur la même ligne la racine cubique, accompagnée d'un zéro, son cube, accompagné de trois zéros, le terme de la suite des différences des cubes et le terme de la progression génératrice. 4°. Nous additionnons comme à l'ordinaire, et nous augmentons, à chaque addition, de 6 le

dernier chiffre du terme de la progression génératrice, jusqu'à ce que nous ayons trouvé le plus grand cube des trois premières tranches.

1°. Nous obtenons le terme de la progression génératrice qui concourt à nous faire trouver le plus grand cube des quatre premières tranches, en mettant après la racine cubique qui provient des trois premières tranches un zéro, qui restera ou sera remplacé par un autre chiffre, ainsi qu'on le verra dans la suite de nos calculs; en multipliant la racine cubique, augmentée d'un zéro, par 6; en soustrayant 6 du dernier chiffre du produit de cette multiplication, pour avoir le terme de la progression génératrice correspondant à la racine qui provient des trois premières tranches, et qui est suivie d'un zéro. 2°. Nous obtenons le terme de la suite des différences des cubes qui coopère à nous faire avoir le plus grand cube des quatre premières tranches en élevant la racine cubique, suivie d'un zéro, à son quarré, que nous triplons; en ôtant la même racine triplée de son quarré triplé, pour avoir, plus 1, le terme de la suite des différences des cubes correspondant aussi à cette même racine, suivie d'un zéro. 3°. Nous plaçons sur la même ligne la racine cubique, accompagnée d'un zéro, son cube, accompagné de trois zéros, le terme de la suite des différence des cubes et le terme de la progression génératrice. 4°. Nous additions comme à l'ordinaire, et nous augmentons, à chaque addition, de 6 le dernier chiffre du terme de la progression génératrice, jusqu'à ce que nous ayons trouvé le plus grand cube des quatre premières tranches.

La méthode, aussi facile que sûre, que nous avons enseignée pour avoir chaque terme de la progression génératrice et chaque terme de la suite des différences des cubes, avec lesquels nous pouvons trouver successivement les racines des plus grands cubes des deux premières, des trois premières, des quatre premières tranches, peut nous faire

trouver celles des cinq premières, des six premières, des sept premières, des huit premières, etc., tranches. Nous observons que les règles certaines contenues dans chaque numéro sont uniformes; nous appliquerons cette théorie dans les exemples suivans.

EXEMPLE I^er^.

1, 027, 243, 729.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
10	1090	271	54 1
11	1331	331	69.

1331, dont la racine est 11, est le cube excédant; ainsi, 1000, dont la racine est 10, est le cube le plus approchant de 1027, les deux premières tranches.

Transition des centaines de la racine à ses dixaines, et formation des cubes de la racine qui augmente de dixaine en dixaine.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
100	1000000	29701	594
101	1030301	30301	600

1030301, dont la racine est 101, est le cube excédant; ainsi, 1000000, dont la racine est 100, est le cube le plus approchant de 1027243, les trois premières tranches.

Transition des dixaines de la racine à ses unités, et formation des cubes de la racine qui augmente d'unité en unité.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
1000	1000000000	2997001	5994
1001	1003003001	3003001	6000
1002	1006012008	3009007	6006
1003	1009027027	3015019	6012
1004	1012048064	3021037	6018
1005	1015075125	3027061	6024
1006	1018108216	3033091	6030
1007	1021147343	3039127	6036
1008	1024192512	3045169	6042
1009	1027243729	3051217	6048

Ayant partagé, de droite à gauche, le nombre 1027243729 en quatre tranches, la racine cubique doit avoir quatre chiffres, qui expriment des mille, des centaines, des dixaines et des unités.

Après avoir extrait 1, la racine cubique, de 1, la tranche le plus à gauche, nous cherchons ainsi celle du plus grand cube de 1027, les deux premières tranches. 1°. Nous obtenons le terme de la progression génératrice qui concourt à nous faire trouver le plus grand cube des deux premières tranches en mettant après 1, la racine cubique qui provient de la première tranche, un zéro; en multipliant 10, la racine cubique, par 6; en soustrayant 6 de 60, produit de cette multiplication, pour avoir 54, le terme correspondant de la progression génératrice. 2°. Nous obtenons le terme de la suite des différences des cubes qui coopère à nous faire avoir le plus grand cube des deux premières tranches en élevant la racine cubique 10 à son quarré 100, qui, étant triplé, fait 300; en ôtant 30, la même racine

triplée, de 300, son quarré triplé, pour avoir, plus 1, 271, le terme correspondant de la suite des différences des cubes. 3°. Nous plaçons sur la même ligne 10, la racine cubique, accompagnée d'un zéro, 1000, son cubè, accompagné de trois zéros, 271, le terme de la suite des différences des cubes, et 54, le terme de la progression génératrice. 4°. Nous additionnons 60, le terme de la progression génératrice augmenté de 6, et 271, le terme de la suite des différences des cubes, puis 331, la somme de cette addition, et 1000, le cube de 10, pour avoir 1331, le cube de 11, qui excède 1027, les deux premières tranches. Par conséquent, 1000, dont la racine est 10, en est le cube le plus approchant.

Pour passer des centaines de la racine à ses dixaines, nous cherchons à extraire celle du plus grand cube de... 1027243, les trois premières tranches. 1°. Nous obtenons le terme de la progression génératrice qui concourt à nous faire trouver le plus grand cube des trois premières tranches en mettant après 10, la racine cubique qui provient des deux premières tranches, un zéro; en multipliant 100, la racine cubique, par 6; en soustrayant 6 de 600, produit de cette multiplication, pour avoir 594, le terme correspondant de la progression génératrice. 2°. Nous obtenons le terme de la suite des différences des cubes qui coopère à nous faire avoir le plus grand cube des trois premières tranches en élevant la racine cubique 100 à son quarré 10000, qui, étant triplé, fait 30000; en ôtant 300, la racine triplée, de 30000, quarré triplé, pour avoir, plus 1, 29701, le terme de la suite des différences des cubes. 3°. Nous plaçons sur la même ligne 100, la racine cubique, accompagnée d'un zéro, 1000000, son cube, accompagné de trois zéros, 29701, le terme de la suite des différences des cubes, et 594, le terme de la progression génératrice. 4°. Nous additionnons 600, le terme de la progression génératrice augmenté de 6, et 29701, le terme de

la suite des différences des cubes, puis 303o1, la somme de cette addition, et 1000000, le cube de 100, pour avoir 1030301, le cube de 101, qui excède les trois premières tranches 1027243. Par conséquent, 1000000, dont la racine est 100, en est le cube le plus approchant.

Pour passer des dixaines de la racine à ses unités, nous cherchons à extraire ainsi celle du plus grand cube de 1027243729, le nombre entier. 1°. Nous obtenons le terme de la progression génératrice qui concourt à nous faire trouver le plus grand cube du nombre entier en mettant après 100, la racine cubique qui provient des trois premières tranches, un zéro; en multipliant 1000, la racine cubique, par 6; en soustrayant 6 de 6000, produit de cette multiplication, pour avoir 5994, le terme correspondant de la progression génératrice. 2°. Nous obtenons le terme de la suite des différences des cubes qui coopère à nous faire avoir le plus grand cube du nombre entier en élevant 1000, la racine cubique, à son quarré 1000000, qui, étant triplé, fait 3000000, et en ôtant 3000, la même racine triplée, de 3000000, son quarré triplé, pour avoir, plus 1, 2997001, le terme de la suite des différences des cubes. 3°. Nous plaçons sur la même ligne 1000, la racine cubique, accompagnée d'un zéro, 10000000000, son cube, accompagné de trois zéros, 2997001, le terme de la suite des différences des cubes, et 5994, le terme de la progression génératrice. 4°. Nous additionnons 6000, le terme de la progression génératrice augmenté de 6, et 2997001, le terme de la suite des différences des cubes, puis 3003001, la somme de cette addition, et 1000000000, le cube de 1000, pour avoir 1003003001, le cube de 1001; ensuite, nous additionnons 6006, le terme de la progression génératrice, et 3003001, le terme de la suite des différences des cubes, puis 3009007, la somme de cette addition, et 1003003001, le cube de 1001, pour avoir 1006012008, le cube de 1002. Nous additionnons 6012, le terme de la progression gé-

génératrice, et 3009007, le terme de la suite des différences des cubes, puis 3015019, la somme de cette addition, et 1006012008, le cube de 1002, pour avoir 1009027027, le cube de 1003. Nous additionnons 6018 et 3015019, puis 3021037, la somme de cette addition, et 1009027027, le cube de 1003, pour avoir 1012048064, le cube de 1004. Nous additionnons 6024 et 3021037, puis 3027061, la somme de cette addition, et 1012048064, le cube de 1004, pour avoir 1015075125, le cube de 1005. Nous additionnons 6030 et 3027061, puis 3033091, la somme de cette addition, et 1015075125, le cube de 1005, pour avoir 1018108216, le cube de 1006. Nous additionnons 6036 et 3033091, puis 3039127, la somme de cette addition, et 1018108216, le cube de 1006, pour avoir 1021147343, le cube de 1007. Nous additionnons 6042 et 3039127, puis 3045169, la somme de cette addition, et 1021147343, le cube de 1007, pour avoir 1024192512, le cube de 1008. Nous additionnons 6048 et 3045169, puis 3051217, la somme de cette addition, et 1024192512, le cube de 1008, pour avoir 1027243729, le cube parfait de 1009.

EXEMPLE II.

9, 880, 245, 203, 912.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
20	8000	1141	114
21	9261	1261	120
22	10648; cube excédant.	1387	126

Transition des mille de la racine à ses centaines, et formation des cubes de la racine qui augmente de centaine en centaine.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
210	9261000	131671	1254
211	9393931	132931	1260
212	9528128	134197	1266
213	9663597	135469	1272
214	9800344	136747	1278
215	9938375, cube excédant	138031	1284

Transition des centaines de la racine à ses dixaines, et formation des cubes de la racine qui augmente de dixaine en dixaine.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
2140	9800344000	13732381	12834
2141	9814089221	13745221	12840
2142	9827847288	13758067	12846
2143	9841618207	13770919	12852
2144	9855401984	13783777	12858
2145	9869198625	13796641	12864
2146	9883008136, c. excéd.	13809511	12870

Transition des dixaines de la racine à ses unités, et formation des cubes de la racine qui augmente d'unité en unité.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice
21450	986919862500o	138024315i	128694
21451	9870578996851	138037185i	128700

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
21452	9871959497408	1380500557	128706
21453	9873340126677	1380629269	128712
21454	9874720884664	1380757987	128718
21455	9876101771375	1380886711	128724
21456	9877482786816	1381015441	128730
21457	9878863930993	1381144177	128736
21458	9880245203912	1381272919	128742

Ayant partagé le nombre 9880245203912 en cinq tranches, nous avons à la racine cubique cinq chiffres, qui, considérés de gauche à droite, valent des dix mille, des mille, des centaines, des dixaines et des unités, dont la valeur est exprimée dans l'exemple II.

Après avoir extrait la racine 2, qui exprime vingt mille, de 8, le cube le plus approchant de 9, la tranche le plus à gauche, nous avons cherché celle de 9880, les deux premières tranches. Pour la trouver, 1°. nous avons mis à la suite de 2, qui provient de la première tranche, un zéro, et de 8, son cube, trois zéros, en sorte que 20 est la racine cubique de 8000; 2°. nous avons multiplié 20, la racine cubique, par 6, soustrait 6 de 120, produit de cette multiplication, pour avoir 114, le terme correspondant de la progression génératrice; 3°. nous avons élevé 20, la racine cubique, à son quarré 400, qui, étant triplé, fait 1200, ôté 60, la racine triplée, de 1200, quarré triplé, pour avoir, plus 1, 1141, le terme correspondant de la suite des différences des cubes; 4°. nous avons placé sur la même ligne 20, la racine cubique, 8000, son cube, 1141, le terme de la suite des différences des cubes, et 114, le terme de la progression génératrice; 5°. nous avons additionné comme à l'ordinaire, et augmenté, à chaque ad-

dition, de 6 le dernier chiffre du terme de la progression génératrice, jusqu'à ce que nous ayons obtenu 21, la racine de 9261, le plus grand cube de 9880, les deux premières tranches, puisque 10648, cube de 22, les dépasse.

Puis nous avons cherché celle de 9880245, les trois premières tranches. Pour la trouver, 1°. nous avons mis à la suite de 21, qui provient des deux premières tranches, un zéro, et de 9261, trois zéros, en sorte que 210 est la racine cubique de 9261000; 2°. nous avons multiplié 210, la racine cubique, par 6, soustrait 6 de 1260, produit de cette multiplication, pour avoir 1254, le terme correspondant de la progression génératrice; 3°. nous avons élevé 210, la racine cubique, à son quarré 44100, qui, étant triplé, fait 132300, ôté 630, la racine triplée, de 132300, quarré triplé, pour avoir, plus 1, 131671, le terme correspondant de la suite des différences des cubes; 4°. nous avons placé sur la même ligne 210, la racine cubique, 9261000, son cube, 131671, le terme de la suite des différences des cubes, et 1254, le terme de la progression génératrice; 5°. nous avons additionné comme à l'ordinaire, et augmenté, à chaque addition, de 6 le dernier chiffre du terme de la progression génératrice, jusqu'à ce que nous ayons obtenu 9800344, cube de 214, le plus grand que contiennent 9880245, les trois premières tranches, puisque 9938375, cube de 215, les dépasse.

Ensuite, nous avons cherché celle de 9880245203, les quatre premières tranches. Pour la trouver, 1°. nous avons mis à la suite de 214, la racine qui provient des trois premières tranches, un zéro, et de 9800344, trois zéros, en sorte que 2140 est la racine cubique de 9800344000; 2°. nous avons multiplié 2140, la racine cubique, par 6, soustrait 6 de 12840, produit de cette multiplication, pour avoir 12834, le terme correspondant de la progression génératrice; 3°. nous avons élevé 2140, la racine cubique, à son quarré 4579600, qui, étant triplé, fait 13738800, ôté 6420, la racine triplée, de 13738800, quarré triplé, pour

avoir, plus 1, 13732381, le terme correspondant de la suite des différences des cubes; 4°. nous avons placé sur la même ligne 2140, la racine cubique, 9800344000, son cube, ... 13732381, le terme de la suite des différences des cubes, et 12834, le terme de la progression génératrice; 5°. nous avons additionné comme à l'ordinaire, et augmenté, à chaque addition, de 6 le dernier chiffre du terme de la progression génératrice, jusqu'à ce que nous ayons obtenu 2145, la racine de 9869198625, le plus grand cube de 9880245203, les quatre premières tranches, puisque..... 9883008136, cube de 2146, les dépasse.

Enfin, nous avons cherché celle du nombre entier..... 988024520391 2. Pour la trouver, 1°. nous avons mis à la suite de 3145, qui provient des quatre premières tranches, un zéro, et de 9869198625, trois zéros, en sorte que 21450 est la racine cubique de 9869198625000; 2°. nous avons multiplié 21450, la racine cubique, par 6, soustrait 6 de 128700, produit de cette multiplication, pour avoir 128694, le terme correspondant de la progression génératrice; 3°. nous avons élevé 2145, la racine cubique, à son quarré 4601025000, qui, étant triplé, fait 13803075000, ôté 64350, la racine triplée, de 13803075000, quarré triplé, pour avoir, plus 1, 13802431 51, le terme correspondant de la suite des différences des cubes; 4°. nous avons placé sur la même ligne 21450, la racine cubique, 9669198625000, son cube, ... 13802431 51, le terme de la suite des différences des cubes, et 128694, le terme de la progression génératrice; 5°. nous avons additionné comme à l'ordinaire, et augmenté, à chaque addition, de 6 le dernier chiffre du terme de la progression génératrice, jusqu'à ce que nous ayons obtenu 21458, la racine du nombre entier 9880245203912, qui est un cube parfait.

Dans les exemples subséquens, nous ne répéterons point les règles que nous avons suivies pour trouver la racine cubique d'un nombre donné, nous nous contenterons seule-

ment, afin d'éviter les répétitions, de dire qu'à chaque transition d'une dixaine de la racine à une autre immédiatement inférieure elles sont semblables. Elles consistent seulement, 1°. à mettre à la suite de la dernière racine cubique un zéro, et à la suite de son cube trois zéros, afin d'observer la proportion de 1 à 3, ainsi que ce calcul le veut rigoureusement; 2°. à multiplier la racine cubique, augmentée d'un zéro, par 6, à soustraire 6 du produit de cette multiplication, pour avoir le terme correspondant de la progression génératrice; 3°. à élever la racine cubique, augmentée d'un zéro, à son quarré triplé, duquel il faut ôter la racine triplée, pour avoir, plus 1, le terme correspondant de la suite de la différence des cubes, par la raison que chaque terme de cette suite égale le quarré triplé de chaque racine correspondante, moins cette même racine triplée, plus 1; 4°. à placer sur la même ligne la racine cubique, son cube, le terme de la suite des différences des cubes et le terme de la progression génératrice; 5°. à additionner comme à l'ordinaire, et à augmenter, à chaque addition, de 6 le dernier chiffre du terme de la progression génératrice, jusqu'à ce qu'on ait obtenu la racine du plus grand cube des deux premières, des trois premières, des quatre premières, des cinq premières, des six premières, etc., tranches, et enfin du nombre entier.

EXEMPLE III.

254, 209, 614, 780, 654.

Le nombre 354209614780654 étant partagé en cinq tranches, a nécessairement à la racine cubique cinq chiffres, qui, dans la direction de gauche à droite, valent des dix mille, des mille, des centaines, des dixaines et des unités.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
70	343000	14491	414
71	357911	14911	420

357911, dont la racine est 71, est le cube excédant; ainsi, 343000, dont la racine est 70, est le cube le plus approchant de 354209, les deux premières tranches.

Transition des mille de la racine à ses centaines, et formation des cubes de la racine qui augmente de centaine en centaine.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
700	343000000	1467901	4194
701	344472101	1472101	4200
702	345948408	1476307	4206
703	347428927	1480519	4212
704	348913664	1484737	4218
705	350402625	1488961	4224
706	351895816	1493191	4230
707	353393243	1497427	4236
708	354894912	1501669	4242

354894912, dont la racine est 708, est le cube excédant; ainsi, 353393243, dont la racine est 707, est le cube le plus approchant de 354209614, les trois premières tranches.

Transition des centaines de la racine à ses dixaines, et formation des cubes de la racine qui augmente de dixaine en dixaine.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
7070	353393243000	149933491	42414
7071	353543218911	149975911	42420

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
7072	353693237248	150018337	42426
7073	353843298017	150060769	42432
7074	353993401224	150103207	42438
7075	354143546875	150145651	42444
7076	354293734976	150188101	42450

354293734976, dont la racine est 7076, est le cube excédant; ainsi, 354143546875, dont la racine est 7075, est le cube le plus approchant de 354209614780, les quatre premières tranches.

Transition des dixaines de la racine à ses unités, et formation des cubes de la racine qui augmente d'unité en unité.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
70750	354143546875000	150164752 51	424494
70751	354158563774751	150168997 51	424500
70752	354173581099008	150173242 57	424506
70753	354188598847777	150177487 69	424512
70754	354203617021064	150181732 87	424518
70755	354218635618875	150185978 11	424524

354218635618875, qui a pour racine 70755, est un cube qui excède le nombre entier. 354209614780654 ; ainsi, 354203617021064, qui a pour racine 70754, en est le cube le plus approchant. Donc le nombre entier 354209614780654 contient 354203617021064, cube parfait de 70754, plus 5997759590, reste bien inférieur à 150185978 11, la différence entre le cube, dont la racine est 70754, et le cube, dont la racine est 70755.

EXEMPLE IV.

999, 988, 000, 047, 999, 936.

Le nombre 999988000047999936 étant partagé en six tranches, a nécessairement à la racine cubique six chiffres, qui, dans la direction de gauche à droite, valent des cent mille, des dix mille, des mille, des centaines, des dixaines et des unités.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
90	729000	24031	534
91	753571	24571	540
92	778688	25117	546
93	804357	25669	552
94	830584	26227	558
95	857375	26791	564
96	884736	27361	570
97	912673	27937	576
98	941192	28519	582
99	970299	29107	588
100	1000000	29701	594

1000000, dont la racine est 100, est le cube excédant; ainsi, 979299, dont la racine est 99, est le cube le plus approchant de 999988, les deux premières tranches.

Transition des dix mille de la racine à ses mille, et formation des cubes de la racine qui augmente de mille en mille.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
990	970299000	2937331	5934
991	973242271	2943271	5940

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
992	976191488	2949217	5946
993	979146657	2955169	5952
994	982107784	2961127	5958
995	985074875	2967091	5964
996	988047936	2973061	5970
997	991026973	2979037	5976
998	994011992	2985019	5982
999	997002999	2991007	5988
1000	1000000000	2997001	5994

1000000000, dont la racine est 1000, est le cube excédant; ainsi, 997002999, dont la racine est 999, est le cube le plus approchant de 999988000, les trois premières tranches.

Transition des mille de la racine à ses centaines, et formation des cubes de la racine qui augmente de centaine en centaine.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
9990	997002999000	299370331	59934
9991	997302429271	299430271	59940
9992	997601919488	299490217	59946
9993	997901469657	299550169	59952
9994	998201079784	299610127	59958
9995	998500749875	299670091	59964
9996	998800479936	299730061	59970
9997	999100269973	299790037	59976
9998	999400119992	299850019	59982
9999	999700029999	299910007	59988
10000	1000000000000	299970001	59994

1000000000000, dont la racine est 10000, est le

cube excédant; ainsi, 999700029999, dont la racine est 9999, est le cube le plus approchant de..... 999988000047, les quatre premières tranches.

Transition des centaines de la racine à ses dixaines, et formation des cubes de la racine qui augmente de dixaine en dixaine.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
99990	999700029999000	299937003331	599934
99991	999730024299271	299943002 71	599940
99992	999760019199488	299949002 17	599946
99993	999790014699657	299955001 69	599952
99994	999820010799784	299961001 27	599958
99995	999850007499875	299967000 91	599964
99996	999880004799936	299973000 61	599970
99997	999910002699973	299979000 37	599976
99998	999940001199992	299985000 19	599982
99999	999970000299999	299991000 07	599988
100000	1000000000000000	299997000 01	599994

1000000000000000, dont la racine est 100000, est le cube excédant; ainsi, 999970000299999, dont la racine est 99999, est le cube le plus approchant de 999988000047999, les cinq premières tranches.

Transition des dixaines de la racine à ses unités, et formation des cubes de la racine qui augmente d'unité en unité.

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
999990	999970000299999000	2999937000331	5999934
999991	999973000242999271	2999943000271	5999940

Racines.	Cubes.	Différences des cubes.	Progression génératrice.
999992	999976000191999488	299994900021 7	5999946
999993	999979000146999657	299995500016 9	5999952
999994	999982000107999784	299996100012 7	5999958
999995	999985000074999875	299996700009 1	5999964
999996	999988000047999936	299997300006 1	5999970

Ainsi, le nombre 999988000047999936, donné à extraire, est un cube parfait, dont la racine est... 999996.

DEUXIÈME SECTION.

Preuve d'un calcul exact sur l'extraction de la racine cubique.

Les termes de la progression génératrice 0, 6, 12, 18, 24, 30, etc., etc., et les termes de la suite des différences des cubes 1, 7, 19, 37, 61, 91, etc., etc., sont deux séries qui, additionnées [illegible]cutivement, ont la propriété essentielle et immuable de former tous les cubes des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., etc. Dans la transition d'une dixaine de la racine à une autre immédiatement inférieure, transition absolument nécessaire pour trouver simultanément la racine et le plus grand cube des deux premières tranches, des trois premières tranches, des quatre premières tranches, des cinq premières tranches, des six premières tranches, etc., et d'un nombre quelconque donné, il a fallu obtenir le terme de la progression génératrice et le terme de la suite des différences des cubes, qui tous deux correspondent à la dixaine immédiatement inférieure de la racine, et concourent à former les cubes des racines subséquentes. Comme chacun de ces termes est subordonné à des lois par-

ticulières dépendantes de la loi générale, il était absolument nécessaire de chercher à les connaître, afin de pouvoir descendre, par gradation, des dixaines supérieures de la racine à ses dixaines inférieures, nous rapprocher ainsi de ses unités, et afin de pouvoir par suite extraire la racine cubique d'un nombre quelconque.

Dans nos recherches, aussi pénibles et longues que curieuses et utiles, nous avons enfin trouvé les règles qui sont les lois particulières émanées de cette loi générale qui forme tous les cubes, et qui par cela même en est le principe générateur. Nous avons fait connaître ces règles, qui nous paraissent sûres et faciles à concevoir relativement à l'extraction de la racine cubique. Pour prouver combien les calculs qui en proviennent sont exacts, nous allons vérifier ceux des quatre exemples de la première section, à l'effet de nous assurer si les racines extraites sont réellement celles des cubes correspondans. A cette fin, nous multiplierons la racine cubique, 1°. par elle-même; 2°. par son quarré, en observant néanmoins que, pour rendre la multiplication plus aisée et plus certaine, nous additionnerons successivement chaque racine cubique par les neuf chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

I. 1009 est la racine cubique de 1027243729.

Preuve.

1009×1009	1009×1018081, le quarré.	1 = 1009
9081	1009	2 = 2018
0000	8072	3 = 3027
0000	0000	4 = 4036
1009	8072	5 = 5045
1018081,	1009	6 = 6054
quarré.	0000	7 = 7063
	1009	8 = 8072
	Le cube est 1027243729	9 = 9081.

Donc 1009 est la racine cubique de 1027243729.

II. 21458 est la racine cubique de 9880245203912.

Preuve.

21458×21458	21458×460445764, quarré.	1 = 21458
171664	85832	2 = 42916
107290	128748	3 = 64374
85832	150206	4 = 85832
21458	107290	5 = 107290
42916	85832	6 = 128748
460445764,	85832	7 = 150206
quarré.	00000	8 = 171664
	128748	9 = 193122.
	85832	
	9880245203912, cube.	

Donc 21458 est la racine cubique de 9880245203912.

III. 70754 est la racine cubique de 354203617021064.

Preuve.

70754×70754	70754×5006128516, quarré.	1 = 70754
283016	424524	2 = 141508
353770	70754	3 = 212262
495278	353770	4 = 283016
000000	566032	5 = 353770
495278	141508	6 = 424524
5006128516,	70754	7 = 495278
quarré.	424524	8 = 566032
	00000	9 = 636786.
	00000	
	353770	
	354203617021064.	

Donc 70754 est la racine cubique de 354203617021064.

IV. 999996 est la racine cubique de 9999880000479999936.

Preuve.

999996×999996	999996×999992000016,	1 = 999996
5999976	le quarré.	2 = 1999992
8999964	5999976	3 = 2999988
8999964	999996	4 = 3999984
8999964	000000	5 = 4999980
8999964	000000	6 = 5999976
8999964	000000	7 = 6999972
999992000016,	000000	8 = 7999968
quarré.	1999992	9 = 8999964.
	8999964	
	8999964	
	8999964	
	8999964	
	8999964	
	9999880000479999936, cube.	

Donc 999996 est la racine cubique de..... 9999880000479999936.

EXEMPLE 1er.

1, 027, 243, 729.

Nous pouvons, dans l'extraction des racines cubiques des nombres donnés, retrancher la progression génératrice des cubes, et employer seulement la formule arithmétique, qui consiste à prendre le triple quarré de la racine correspondante, moins la même racine triplée, plus 1, et qui ainsi produit chaque différence des cubes, puisque nous pouvons la généraliser et l'appliquer à tous les cas. L'exemple suivant en sera une preuve incontestable.

Comme 1 est la racine du cube 1, nous allons chercher

celle du cube le plus approchant de 1027, les deux premières tranches du nombre 1027243729. Pour la trouver, 1°. nous mettons un zéro à la suite de 1, la racine extraite de la première tranche, et trois zéros à la suite de 1, son cube, en sorte que 10 est la racine cubique de 1000, et nous prenons 11, la racine suivante, dont nous cherchons le cube; 2°. la formule 363, le triple quarré de 11, moins 33, sa triple racine, plus 1, produit 331, la différence comprise entre les cubes des racines 10 et 11; 3°. nous additionnons 331, la différence, et 1000, cube de 10, pour avoir la somme 1331, le cube de 11, qui excède 1027, les deux premières tranches. Donc 1000, qui a pour racine 10, en est le cube le plus approchant.

Pour trouver la racine cubique de 1027243, les trois premières tranches du même nombre, 1°. nous mettons un zéro à la suite de 10, la racine extraite des deux premières tranches, et trois zéros à la suite de 1000, son cube, en sorte que 100 est la racine cubique de 1000000, et nous prenons 101, la racine suivante, dont nous cherchons le cube; 2°. la formule 30603, le triple quarré de 101, moins 303, sa triple racine, plus 1, produit 30301, la différence comprise entre les cubes des racines 100 et 101; 3°. nous additionnons 30301, la différence, et 1000000, cube de 100, pour avoir 1030301, cube de 101, qui excède 1027243, les trois premières tranches. Donc 100 est la racine de 1000000, le cube le plus approchant des deux premières tranches.

Pour trouver la racine cubique de 1027243729, le nombre entier, 1°. nous mettons un zéro à la suite de 100, la racine extraite des trois premières tranches, et trois zéros à la suite de 1000000, son cube, en sorte que 1000 est la racine cubique de 1000000000, et nous prenons 1001, la racine suivante, dont nous cherchons le cube; 2°. la formule.... 3006003, le triple quarré de 1001, moins 3003, sa triple racine, plus 1, produit 3003001, la différence comprise entre les cubes des racines 1000 et 1001; 3°. nous additionnons

3003001, la différence, et 1000000000, cube de 10000, pour avoir la somme 1003003001, le cube de 1001. 1°. Nous prenons 1002, la racine suivante, dont nous cherchons le cube; 2°. la formule 3012012, le triple quarré de 1002, moins 3006, sa triple racine, plus 1, produit 3009007, la différence comprise entre les cubes des racines 1001 et 1002; 3°. nous additionnons 3009007, la différence, et 1003003001, cube de 1001, pour avoir la somme 1006012008, le cube de 1002. 1°. Nous prenons 1003, la racine suivante, dont nous cherchons le cube; 2°. la formule 3018027, le triple quarré de 1003, moins 3009, sa racine triplée, plus 1, produit 3015019, la différence comprise entre les cubes des racines 1002 et 1003; 3°. nous additionnons 3015019, la différence, et 1006012008, cube de 1002, pour avoir la somme..... 1009027027, le cube de 1003. 1°. Nous prenons 1004, la racine suivante, dont nous cherchons le cube; 2°. la formule 3024048, le triple quarré de 1004, moins 3012, sa triple racine, plus 1, produit 3021037, la différence comprise entre les cubes des racines 1003 et 1004; 3°. nous additionnons 3021037, la différence, et 1009027027, cube de 1003, pour avoir la somme 1012048064, le cube de 1004. 1°. Nous prenons 1005, la racine suivante, dont nous cherchons le cube; 2°. la formule 3030075, le triple quarré de 1005, moins 3015, sa triple racine, plus 1, produit 3027061, la différence comprise entre les cubes des racines 1004 et 1005; 3°. nous additionnons 3027061, la différence, et 1012048064, cube de 1004, pour avoir la somme 1015075125, le cube de 1005. 1°. Nous prenons 1006, la racine suivante, dont nous cherchons le cube; 2°. la formule 3036108, le triple quarré de 1006, moins 3018, sa triple racine, plus 1, produit 3033091, la différence comprise entre les cubes des racines 1005 et 1006; 3°. nous additionnons 3033091, la différence, et 1015075125, cube de 1005, pour avoir 1018108216, le cube de 1006. 1°. Nous prenons 1007, la racine suivante, dont nous cherchons le cube; 2°. la formule 3042147, le

triple quarré de 1007, moins 3021, sa triple racine, plus 1, produit 3039127, la différence comprise entre les cubes des racines 1006 et 1007; 3°. nous additionnons 3039127, la différence, et 1018108216, cube de 1006, pour avoir la somme 1021147343, le cube de 1007. 1°. Nous prenons 1008, la racine suivante, dont nous cherchons le cube; 2°. la formule 3048192, le triple quarré de la racine 1008, moins 3024, sa triple racine, plus 1, produit 3045169, la différence comprise entre les cubes 1007 et 1008; 3°. nous additionnons 3045169, la différence, et 1021147343, cube de 1007, pour avoir la somme 1024192512, le cube de 1008. 1°. Nous prenons 1009, la racine suivante, dont nous cherchons le cube; 2°. la formule 3054243, le triple quarré de la racine 1009, moins 3027, sa racine triplée, plus 1, produit 3051217, la différence comprise entre les cubes des racines 1008 et 1009; 3°. nous additionnons 3051217, la différence, et 1024192512, le cube de 1008, pour avoir la somme 1027243729, le nombre entier, le cube de 1009.

MÉTHODE NOUVELLE

POUR FORMER

LES QUATRIÈMES PUISSANCES

ET EXTRAIRE LEURS RACINES.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA FORMATION DE LA QUATRIÈME PUISSANCE.

PREMIÈRE SECTION.

De la formation de la quatrième puissance des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, etc., *et de leurs dixaines ascendantes.*

Quand nous voulûmes connaître la progression génératrice de la quatrième puissance, nous formâmes la quatrième puissance des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, etc., et nous eûmes 1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, 6561, etc.; nous ôtâmes, en suivant l'ordre de leur formation, 1 de 16, dont la différence est 15; 16 de 81, dont la différence est 65; 81 de 256, dont la différence est 175; 256 de 625, dont la différence est 369; 625 de 1296, dont la différence est 671; 1296 de 2401, dont la différence est 1105; 2401 de 4096, dont la différence est 1695; 4096 de 6561, dont la différence est 2465.

Nous mîmes une unité pour premier terme de toutes ces

premières différences, et nous eûmes 1, 15, 65, 175, 369, 671, 1105, 1695, 2465, la première suite des différences, dont les termes sont variables entre eux, c'est-à-dire ne sont pas en progression arithmétique; alors nous ôtâmes 1 de 15, dont la différence est 14; 15 de 65, dont la différence est 50; 65 de 175, dont la différence est 110; 175 de 369, dont la différence est 194; 369 de 671, dont la différence est 302; 671 de 1105, dont la différence est 434; 1105 de 1695, dont la différence est 590; 1695 de 2465, dont la différence est 770.

Nous mîmes 2 pour premier terme de toutes ces secondes différences, et nous eûmes 2, 14, 50, 110, 194, 302, 434, 590, 770, la seconde suite des différences, dont les termes sont variables entre eux, c'est-à-dire ne sont pas en progression arithmétique. Aussi, pour trouver le principe générateur de la quatrième puissance, nous ôtâmes 2 de 14, dont la différence est 12; 14 de 50, dont la différence est 36; 50 de 110, dont la différence est 60; 110 de 194, dont la différence est 84; 194 de 302, dont la différence est 108; 302 de 434, dont la différence est 132; 434 de 590, dont la différence est 156; 590 de 770, dont la différence est 180.

Cette troisième suite, à laquelle nous avons mis pour premier terme zéro, est composée de 0, 12, 36, 60, 84, 108, 132, 156, 180, dont la différence 24 commence entre 12 et 36, et est en progression arithmétique entre tous les autres termes qui suivent, et par cela même est invariable. Cette série, que nous avons trouvée par la soustraction, est d'autant plus facile pour sa composition, qu'il suffit d'ajouter 24 à chaque terme; elle est la progression génératrice de la quatrième puissance des nombres.

Pour recomposer la quatrième puissance des nombres naturels, d'abord nous avons additionné successivement 2, le premier terme de la deuxième suite, et les termes de la progression génératrice 0, 12, 36, 60, 84, 108, 132, 156, 180, etc., pour avoir 2, 14, 50, 110, 194, 302, 434,

590, 770, etc., ceux de la deuxième suite, puis nous avons additionné successivement 1, premier terme de la première suite, et ceux de la deuxième suite, pour avoir 1, 15, 65, 175, 369, 671, 1105, 1695, 2465, etc., les termes de la première suite. L'addition successive des termes de la première suite compose les quatrièmes puissances des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, etc. (*Voyez* le tableau troisième.)

TROISIÈME TABLEAU.

Racines.	Les quatrièmes puissances, ou les quarrés des quarrés.	Premières différences.	Deuxièmes différences.	Progres génerat.
1	1	1	2	0
2	16	15	14	12
3	81	65	50	36
4	256	175	110	60
5	625	369	194	84
6	1296	671	302	108
7	2401	1105	434	132
8	4096	1695	590	156
9	6561	2465	770	180
10	10000	3439	974	204
11	14641	4641	1202	228
12	20736	6095	1454	252
13	28561	7825	1730	276
14	38416	9855	2030	300
15	50625	12209	2354	324
16	65536	14911	2702	348
17	83521	17985	3074	372
18	104976	21455	3470	396
19	130321	25345	3890	420
20	160000	29679	4334	444

Racines.	Les quatrièmes puissances, ou les quarrés des quarrés.	Premières différences.	Deuxièmes différences.	Progr. génér.
21	194481	34481	4802	468
22	234256	39775	5294	492
23	279841	45585	5810	516
24	331776	51935	6350	540
25	390625	58849	6914	564
26	456976	66351	7502	588
27	531441	74465	8114	612
28	614656	83215	8750	636
29	707281	92625	9410	660
30	810000	102719	10094	684
31	923521	113521	10802	708
32	1048576	125055	11534	732
33	1185921	137345	12290	756
34	1336336	150415	13070	780
35	1500625	164289	13874	804
36	1679616	178991	14702	828
37	1874161	194545	15554	852
38	2085136	210975	16430	876
39	2313441	228305	17330	900
40	2560000	246559	18254	924
41	2825761	265761	19202	948
42	3111696	285935	20174	972
43	3418801	307105	21170	996
44	3748096	329295	22190	1020
45	4100625	352529	23234	1044
46	4477456	376831	24302	1068
47	4879681	402225	25394	1092
48	5308416	428735	26510	1116
49	5764801	456385	27650	1140
50	6250000	485199	28814	1164
51	6765201	515201	30002	1188
52	7311616	546415	31214	1212
53	7890481	578865	32450	1236
54	8503056	612575	33710	1260
55	9150625	647569	34994	1284

Racines.	Les quatrièmes puissances, ou les quarrés des quarrés.	Premières différences.	Deuxièmes différences.	Progres. génerat.
56	9834496	683871	36302	1308
57	10556001	721505	37634	1332
58	11316496	760495	38990	1356
59	12117361	800865	40370	1380
60	12960000	842639	41774	1404
61	13845841	885841	43202	1428
62	14776336	930495	44654	1452
63	15752961	976625	46130	1476
64	16777216	1024255	47630	1500
65	17850625	1073409	49154	1524
66	18974736	1124111	50702	1548
67	20151121	1176385	52274	1572
68	21381376	1230255	53870	1596
69	22667121	1285745	55490	1620
70	24010000	1342879	57134	1644
71	25411681	1401681	58802	1668
72	26873856	1462175	60494	1692
73	28398241	1524385	62210	1716
74	29986576	1588335	63950	1740
75	31640625	1654049	65714	1764
76	33362176	1721551	67502	1788
77	35153041	1790865	69314	1812
78	37015056	1862015	71150	1836
79	38950081	1935025	73010	1860
80	40960000	2009919	74894	1884
81	43046721	2086721	76802	1908
82	45212176	2165455	78734	1932
83	47458321	2246145	80690	1956
84	49787136	2328815	82670	1980
85	52200625	2413489	84674	2004
86	54700816	2500191	86702	2028
87	57289761	2588945	88754	2052
88	59969536	2679775	90830	2076
89	62742241	2772705	92930	2100
90	65610000	2867759	95054	2124

Racines.	Les quatrièmes puissances, ou les quarrés des quarrés.	Premières différences.	Deuxièmes différences.	Progres. générat.
91	68674961	2964961	97202	2148
92	71639296	3064335	99374	2172
93	74805201	3165905	101570	2196
94	78074896	3269695	103790	2220
95	81450625	3375729	106034	2244
96	84934656	3484031	108302	2268
97	88529281	3594625	110594	2292
98	92236816	3707535	112910	2316
99	96059601	3822785	115250	2340
100	100000000	3940399	117614	2364

Nous avons fait le tableau de la quatrième puissance, qui servira à vérifier si les différences comprises entre deux quatrièmes puissances des nombres qui se succèdent sans interruption, et que nous trouvons en employant seulement la progression génératrice des quarrés, sont exactes, et à nous assurer si les quatrièmes puissances qui résultent de ce calcul sont précisément celles des racines correspondantes.

Pour former la quatrième puissance des nombres naturels, et pour extraire leurs racines, nous avons recours à un moyen qui ne résulte pas de la progression génératrice de cette puissance, mais de celle des quarrés. L'analogie parfaite de ces deux puissances nous montre clairement que la quatrième puissance est comprise dans la seconde, et que la progression génératrice des quarrés 1, 3, 5, 7, 9, etc., etc., peut nous être utile pour former les quatrièmes puissances, et pour obtenir l'extraction de la racine quatrième d'un nombre quelconque.

D'abord, dans la première section, nous traiterons uniquement de la formation de la quatrième puissance des nombres.

En effet, nous pensons que les différences qui existent

ntre les quatrièmes puissances des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., etc., et qui servent à les former, sont les produits successifs des termes de la progression génératrice les quarrés. Ainsi, nous voyons que 15, la différence qui existe entre 1 et 16, la quatrième puissance de 2, est le résultat de 3, 5, 7, trois termes de la progression génératrice des quarrés; que 65, la différence qui existe entre 16 et 81, la quatrième puissance de 3, est le résultat de 9, 11, 13, 15, 17, cinq termes de la progression génératrice des quarrés; que 175, la différence qui existe entre 81 et 256, la quatrième puissance de 4, est le résultat de 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, sept termes de la progression génératrice des quarrés; que 369, la différence qui existe entre 256 et 625, la quatrième puissance de 5, est le résultat de 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, neuf termes de la progression génératrice des quarrés; que 671, la différence qui existe entre 625 et 1296, la quatrième puissance de 6, est le résultat de 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, onze termes de la progression génératrice des quarrés; que 1105, la différence qui existe entre 1296 et 2401, la quatrième puissance de 7, est le résultat de 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, treize termes de la progression génératrice des quarrés; que 1695, la différence qui existe entre 2401 et 4096, la quatrième puissance de 8, est le résultat de 99, 101, 103, 105, 107, 109, 111, 113, 115, 117, 119, 121, 123, 125, 127, quinze termes de la progression génératrice des quarrés; que 2465, la différence qui existe entre 4096 et 6561, la quatrième puissance de 9, est le résultat de 129, 131, 133, 135, 137, 139, 141, 143, 145, 147, 149, 151, 153, 155, 157, 159, 161, dix-sept termes de la progression génératrice des quarrés.

Chacune de ces différences et la quatrième puissance de la racine précédente à chaque différence composent toujours la quatrième puissance suivante.

Maintenant, il s'agit de montrer la manière de trouver facilement chaque différence qui existe entre les quatrièmes puissances de deux racines qui se succèdent sans interruption; afin d'y parvenir, il faut connaître les premier et dernier termes, avec lesquels on obtient chaque différence.

1°. On connaît le premier terme en multipliant le double de la racine précédente par elle-même, pour avoir le produit qui, plus 1, est le premier terme.

2°. On connaît le dernier terme en multipliant le double de la racine dont nous cherchons la quatrième puissance par elle-même, pour avoir le produit qui, moins 1, est le dernier terme.

3°. On obtient la différence comprise entre les quatrièmes puissances des deux racines en multipliant la somme des premier et dernier termes trouvés par la moitié des deux racines, puis la quatrième puissance de la racine suivante, en additionnant la différence trouvée et la quatrième puissance de la racine précédente.

Des exemples rendront cette théorie facile à comprendre.

EXEMPLE I^er^.

Règles pour obtenir la différence comprise entre les quatrièmes puissances des racines 6 *et* 7, *et ensuite pour connaître la quatrième puissance de la racine* 7.

D'abord, nous obtenons la différence comprise entre les quatrièmes puissances des racines 6 et 7 en cherchant les premier et dernier termes, avec lesquels nous parvenons à la connaître.

1°. Nous multiplions 12, le double de 6, la racine précédente, par elle-même, pour avoir le produit 72, qui, plus 1, est 73, le premier terme.

2°. Nous multiplions 14, le double de 7, la racine dont nous cherchons la quatrième puissance, par elle-même, pour avoir le produit 98, qui, moins 1, est 97, le dernier terme.

Ensuite, nous multiplions 170, la somme de 73 et de 97, les premier et dernier termes trouvés, par $6\frac{1}{2}$, la moitié de la somme des racines 6 et 7, pour avoir 1105, la différence cherchée.

Enfin, nous connaissons 2401, la quatrième puissance de la racine 7, en additionnant 1105, la différence trouvée, et 1296, la quatrième puissance de 6.

EXEMPLE II.

Règles pour obtenir la différence comprise entre les quatrièmes puissances des racines 7 et 8, et ensuite pour connaître la quatrième puissance de la racine 8.

D'abord, nous obtenons la différence comprise entre les quatrièmes puissances des racines 7 et 8 en cherchant les premier et dernier termes, avec lesquels nous parvenons à la connaître.

1°. Nous multiplions 14, le double de 7, la racine précédente, par elle-même, pour avoir le produit 98, qui, plus 1, est 99, le premier terme.

2°. Nous multiplions 16, le double de 8, la racine dont nous cherchons la quatrième puissance, par elle-même, pour avoir le produit 128, qui, moins 1, est 127, le dernier terme.

Ensuite, nous multiplions 226, la somme de 99 et de 127, les premier et dernier termes trouvés, par $7\frac{1}{2}$, la moitié de la somme des racines 7 et 8, pour avoir 1695, la différence cherchée.

Enfin, nous connaissons 4096, la quatrième puissance de la racine 8, en additionnant 1695, la différence trouvée, et 2401, la quatrième puissance de 7.

EXEMPLE III.

Règles pour obtenir la différence comprise entre les quatrièmes puissances des racines 8 *et* 9, *et ensuite pour connaître la quatrième puissance de la racine* 9.

D'abord, nous obtenons la différence comprise entre les quatrièmes puissances des racines 8 et 9 en cherchant les premier et dernier termes, avec lesquels nous parvenons à la connaître.

1°. Nous multiplions 16, le double de 8, la racine précédente, pour avoir le produit 128, qui, plus 1, est 129, le premier terme.

2°. Nous multiplions 18, le double de 9, la racine dont nous cherchons la quatrième puissance, par elle-même, pour avoir le produit 162, qui, moins 1, est 161, le dernier terme.

Ensuite, nous multiplions 290, la somme de 129 et de 161, les premier et dernier termes trouvés, par $8\frac{1}{2}$; la moitié de la somme des racines 8 et 9, pour avoir 2465, la différence cherchée.

Enfin, nous connaissons 6561, la quatrième puissance de la racine 9, en additionnant 2465, la différence trouvée, et 4096, la quatrième puissance de la racine 8.

EXEMPLE IV.

Règles pour obtenir la différence comprise entre les quatrièmes puissances des racines 9 *et* 10, *et ensuite pour connaître la quatrième puissance de la racine* 10.

D'abord, nous obtenons la différence comprise entre les quatrièmes puissances des racines 9 et 10 en cherchant les premier et dernier termes, avec lesquels nous parvenons à la connaître.

1°. Nous multiplions 18, le double de 9, la racine précédente, par elle-même, pour avoir le produit 162, qui, plus 1, est 163, le premier terme.

2°. Nous multiplions 20, le double de 10, la racine dont nous cherchons la quatrième puissance, par elle-même, pour avoir le produit 200, qui, moins 1, est 199, le dernier terme.

Ensuite, nous multiplions 362, la somme de 163 et de 199, les premier et dernier termes trouvés, par $9\frac{1}{2}$, la moitié de la somme des racines, pour avoir 3439, la différence cherchée.

Enfin, nous connaissons 10000, la quatrième puissance de la racine 10, en additionnant 3439, la différence trouvée, et 6561, la quatrième puissance de la racine 9.

EXEMPLE V.

Règles pour obtenir la différence comprise entre les quatrièmes puissances des racines 10 *et* 11, *et ensuite pour connaître la quatrième puissance de la racine* 11.

D'abord, nous obtenons la différence comprise entre les quatrièmes puissances des racines 10 et 11 en cherchant les premier et dernier termes, avec lesquels nous parvenons à la connaître.

1°. Nous multiplions 20, le double de 10, la racine précédente, par elle-même, pour avoir le produit 200, qui, plus 1, est 201, le premier terme.

2°. Nous multiplions 22, le double de 11, la racine dont nous cherchons la quatrième puissance, par elle-même, pour avoir le produit 242, qui, moins 1, est 241, le dernier terme.

Ensuite, nous multiplions 442, la somme de 201 et de 241, les premier et dernier termes, par $10\frac{1}{2}$, la moitié de la somme des racines, pour avoir 4641, la différence cherchée.

Enfin, nous connaissons 14641, la quatrième puissance de la racine 11, en additionnant 4641, la différence trouvée, et 10000, la quatrième puissance de la racine 10.

Transition des quatrièmes puissances des unités de la racine à celles de ses dixaines.

Pour passer des unités de la racine à ses dixaines, il faut, 1°. mettre à la suite de la racine un zéro, et à la suite de la quatrième puissance quatre zéros, en sorte que la racine suivie d'un zéro soit celle de la quatrième puissance suivie de quatre zéros; 2°. chercher, d'après les règles expliquées ci-devant dans les exemples, la différence comprise entre les quatrièmes puissances des racines, dont l'une est terminée par un zéro et l'autre par une unité, et puis trouver la quatrième puissance de celle qui est terminée par une unité.

Nous nous ferons plus aisément comprendre par des exemples.

EXEMPLE VI.

Afin de transformer la quatrième puissance de 11 unités en celle de ses dixaines, 1°. nous mettons un zéro à la suite de 11, la racine, et quatre zéros à la suite de 14641, sa quatrième puissance, en sorte que 110 est la racine de..... 146410000, sa quatrième puissance; 2°. nous multiplions 220, le double de 110, la racine précédente, par elle-même, pour avoir le produit 24200, qui, plus 1, est 24201, le premier terme; 3°. nous multiplions 240, le double de 120, la racine dont nous cherchons la quatrième puissance, par elle-même, pour avoir le produit 28800, qui, moins 1, est 28799, le dernier terme.

Ensuite, nous multiplions 53000, la somme de 24201 et de 28799, les premier et dernier termes, par 115, la moitié de la somme des racines 110 et 120, pour avoir, en mettant à la suite du produit un zéro, 60950000, la différence cherchée.

Enfin, nous additionnons 60950000, la différence trouvée, et 146410000, la quatrième puissance de 110, pour avoir 207360000, la quatrième puissance de 120.

EXEMPLE VII.

Règles pour obtenir la différence comprise entre les quatrièmes puissances des racines 120 *et* 130, *et ensuite pour connaître la quatrième puissance de la racine* 130.

D'abord, nous obtenons la différence comprise entre les quatrièmes puissances des racines 120 et 130 en cherchant les premier et dernier termes, avec lesquels nous parvenons à la connaître.

1°. Nous multiplions 240, le double de 120, la racine précédente, par elle-même, pour avoir le produit 28800, qui, plus 1, est 28801, le premier terme.

2°. Nous multiplions 260, le double de 130, la racine dont nous cherchons la quatrième puissance, par elle-même, pour avoir le produit 33800, qui, moins 1, est 33799, le dernier terme.

Ensuite, nous multiplions 62600, la somme de 28801 et de 33799, les premier et dernier termes, par 125, la moitié de la somme des racines 120 et 130, pour avoir, en mettant à la suite un zéro, 78250000, la différence cherchée.

Enfin, nous additionnons 78250000, la différence trouvée, et 207360000, la quatrième puissance de 120, pour avoir 285610000, la quatrième puissance de 130.

Transition des quatrièmes puissances des dixaines de la racine à ses centaines.

EXEMPLE VIII.

Afin de transformer la quatrième puissance de 130 dixaines en celle de ses centaines, 1°. nous mettons un zéro à la suite de 130, la racine, et quatre zéros à la suite de 285610000, en sorte que 1300 est la racine de..... 285610000000000, sa quatrième puissance; 2°. nous multi-

plions 2600, le double de 1300, la racine précédente, par elle-même, pour avoir le produit 3380000, qui, plus 1, est 3380001, le premier terme; 3°. nous multiplions 2800, le double de 1400, la racine dont nous cherchons la quatrième puissance, par elle-même, pour avoir le produit 3920000, qui, moins 1, est 3919999, le dernier terme.

Ensuite, nous multiplions 7300000, la somme de 3380001 et de 3919999, les premier et dernier termes, par 1350, la moitié de la somme des racines 1300 et 1400, pour avoir, en mettant à la suite du produit deux zéros, 9855000000000, la différence cherchée.

Enfin, nous additionnons 9855000000000, la différence trouvée, et 2856100000000, la quatrième puissance de 1300, pour avoir 3841600000000, la quatrième puissance de 1400.

Quand on passe des unités de la racine à ses dixaines, de ses dixaines à ses centaines, de ses centaines à ses mille, etc., à chaque transition on place un zéro à la suite de la racine et quatre zéros à la suite de sa quatrième puissance, puis on emploie pour chacune des transitions suivantes les mêmes règles que nous avons enseignées pour les transitions précédentes.

DEUXIÈME SECTION.

De l'extraction de la racine quatrième.

Connaissant la méthode de rendre les chiffres qui vont de gauche à droite, suivant cette progression géométrique décroissante, des dix mille, des mille, des centaines, des dixaines et des unités, ensuite, de trouver les différences comprises entre les quatrièmes puissances des racines qui suivent cette décroissance, et, enfin, de former successivement toutes leurs quatrièmes puissances, il nous sera facile

extraire la racine quatrième d'un nombre quelconque, par raison que les règles que nous emploierons pour son extraction sont absolument les mêmes que celles de leur formation.

Mais auparavant de commencer à extraire la racine d'un nombre, il est utile de savoir, 1°. que tout nombre exprimé par 4 chiffres qui ont la plus grande valeur numérique, comme 9999, a pour racine de la quatrième puissance le seul chiffre 9; que tout nombre exprimé par cinq chiffres qui ont la plus petite valeur numérique, comme 10000, a pour racine de la quatrième puissance les deux chiffres 10; 2°. que tout nombre dont on cherche la racine quatrième doit être partagé, en allant de droite à gauche, par tranches de 4 chiffres en 4 chiffres, excepté la tranche le plus à gauche; 3°. que chaque tranche doit avoir nécessairement 4 chiffres, hormis celle qui est le plus à gauche, qui peut n'en avoir que trois, ou deux, ou un seul; 4°. qu'on doit commencer l'opération par la tranche le plus à gauche, et la continuer en suivant les tranches qui se succèdent immédiatement; 5°. que la racine doit avoir autant de chiffres que le nombre dont on cherche la quatrième puissance a de tranches; 6°. que nous nommons la tranche le plus à gauche, sur laquelle nous opérons d'abord, *première tranche*, les suivantes, *seconde*, *troisième*, etc., *tranches*.

Deux exemples suffiront pour faire comprendre tout ce que nous avons dit dans les exemples I, II, III, IV et V, pour trouver plus facilement les quatrièmes puissances de la racine qui augmente d'unité en unité, et aussi s'élève de dixaine en dixaine, et aussi dans ceux des exemples VI, VII et VIII, qui enseignent la manière de passer d'une dixaine à une dixaine supérieure.

TABLEAU DE L'EXEMPLE Ier.

1, 0980, 4512.

1re col.	2e colonne.	3e colonne.	4e colonne.
Racines	20, le double de la racine précédente 10, multiplié par 10, produit 200, qui, plus 1, est 201, le premier terme. 22, le double de la racine 11, dont on cherche la 4e puissance, multiplié par 11, produit 242, qui, moins 1, est 241, le dernier terme.	442, la somme de 201 et de 241, premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, multipliée par 10 1/2, la moitié de la somme des racines 10 et 11, produit 4641, la différence des 4es puissances des racines 10 et 11.	4641, la différence, et 10000, la 4e puissance de la racine 10, additionnées, forment la 4e puissance de la racine 11.
1	.....	.....	1
Transition des centaines aux dixaines.			
10 11	201, premier terme. 241, dernier terme.	442, la somme de 201 et de 241, multipliée par 10 1/2, la moitié de 10 et 11, produit 4641, la différence.	4641 et 10000 font 14641, la 4e puissance de 11, qui excède 10980, les deux premières tranches.
Transition des dixaines aux unités.			
100 101	20001, prem. terme. 20401, dern. terme.	40402, la somme de 20001 et de 20401, multipliée par 100 1/2, la moitié de 100 et de 101, produit 4060401, la différence.	4060401 et..... 100000000 font... 104060401, la 4e puissance de 101.

1re COL.	2e COLONNE.	3e COLONNE.	4e COLONNE.
101 102	20403, prem. terme. 20807, dern. terme.	41210, la somme de 20403 et de 20807, multipliée par..... 101 1/2, la moitié de 101 et 102, produit 4182815, la différence.	4182815 et..... 10406401 font... 108243216, la 4e puissance de 102.
102 103	20809, prem. terme. 21217, dern. terme.	42026, la somme de 20809 et de 21217, multipliée par..... 102 1/2, la moitié de 102 et de 103, produit 43307665, la différence.	43307665 et..... 108243216 font.... 112550881, la 4e puissance de 103, qui excède le nombre à extraire. Donc 102 est la racine la plus approchante de ce nombre.

Ayant partagé le nombre 10980451 2 en trois tranches, nous devons avoir trois chiffres à la racine composée de centaines, de dixaines et d'unités.

Puisque nous commençons à opérer sur la tranche le plus à gauche, alors le premier chiffre que nous extrairons exprimera des centaines; ainsi, la racine de la quatrième puissance de 1 est 1, qui exprime une centaine.

Ensuite, nous allons opérer sur 10980, les deux premières tranches. Pour faire cette seconde opération, 1°. nous mettons un zéro à la suite de 1, la racine, et quatre zéros à la suite de 1, sa quatrième puissance, en sorte que 10 est la racine quatrième de 10000; 2°. nous prenons 11, la racine suivante, à l'effet d'obtenir la différence comprise entre les deux quatrièmes puissances des racines 10 et 11, et finalement de connaître la quatrième puissance de la racine 11; 3°. nous cherchons la différence, d'abord en multipliant 20, le double de 10, la racine précédente, par elle-même, pour avoir 200, qui, plus 1, est 201, le premier terme de ceux qui doivent être calculés pour la trouver; ensuite, en mul-

tipliant 22, le double de 11, la racine correspondante dont nous voulons obtenir la quatrième puissance, par elle-même, pour avoir 242, qui, moins 1, est 241, son dernier terme; enfin, en multipliant 442, la somme de 201 et de 241, les premier et dernier termes, par $10\frac{1}{2}$, la moitié de la somme des racines 10 et 11, pour avoir 4641, la différence cherchée; 4°. nous additionnons 4641, la différence trouvée, et 10000, la quatrième puissance de 10, pour avoir 14641, la quatrième puissance de 11, qui excède 10980, les deux premières tranches. Donc 10000, qui a pour racine quatrième 10, est la quatrième puissance qui approche le plus de 10980, les deux premières tranches.

Enfin, nous allons opérer sur le nombre entier 109804512. Pour faire cette troisième opération, 1°. nous mettons un zéro à la suite de 10, la racine, et quatre zéros à la suite de 10000, sa quatrième puissance, en sorte que 100 est la racine de la quatrième puissance 100000000; 2°. nous prenons 101, la racine suivante, à l'effet d'obtenir la différence comprise entre les quatrièmes puissances des racines 100 et 101, et finalement de connaître la quatrième puissance de la racine 101; 3°. nous cherchons la différence, d'abord en multipliant 200, le double de 100, la racine précédente, par elle-même, pour avoir 20000, qui, plus 1, est 20001, le premier terme de ceux qui doivent être calculés pour la trouver; ensuite, en multipliant 202, le double de 101, la racine correspondante dont nous voulons obtenir la quatrième puissance, par elle-même, pour avoir 20402, qui, moins 1, est 20401, son dernier terme; enfin, en multipliant 40402, la somme de 20001 et de 20401, les premier et dernier termes, par $100\frac{1}{2}$, la moitié de la somme des racines 100 et 101, pour avoir 4060401, la différence cherchée; 4°. nous additionnons 4060401, la différence trouvée, et 100000000, la quatrième puissance de 100, pour avoir 104060401, la quatrième puissance de 101.

Comme la quatrième puissance de 101 n'approche pas as-

s près le nombre 10980451 2, 1°. nous cherchons à obte-
ir la différence comprise entre les quatrièmes puissances des
cines 101 et 102, et finalement à connaître la quatrième
uissance de la racine 102, que nous trouvons ainsi, d'abord
multipliant 202, le double de la racine 101, par elle-
ème, pour avoir 20402, qui, plus 1, est 20403, le pre-
ier terme; ensuite, en multipliant 204, le double de 102,
racine dont nous voulons avoir la quatrième puissance,
r elle-même, pour avoir 20808, qui, moins 1, est 20807,
dernier terme; enfin, en multipliant 41210, la somme
20403 et de 20807, les premier et dernier termes, par
01 $\frac{1}{2}$, la moitié de la somme des racines 101 et 102, pour
oir 4182815, la différence cherchée; 2°. nous addition-
ons 4182815, la différence trouvée, et 10406040 1, la qua-
ième puissance de 101, pour avoir 10824321 6, la qua-
ième puissance de 102.

Nous avons trouvé, en suivant les mêmes règles précitées,
307665, la différence comprise entre les quatrièmes puis-
nces des racines 102 et 103, que nous additionnons avec
0824321 6, la quatrième puissance de 102. Le résultat de
ette addition est 122557881, la quatrième puissance de
03, qui excède le nombre entier 10980451 2. Donc 102
st la racine quatrième de ce même nombre.

TABLEAU DE L'EXEMPLE II.

20, 7385, 1524, 9936.

1re COL.	2e COLONNE.	3e COLONNE.	4e COLONNE.
Racines.	40, le double de la racine précédente 20, multiplié par 20, elle-même, produit 800, qui, plus 1, est 801, le premier terme. 42, le double de la racine 21, dont on cherche la 4e puissance, multiplié par 21, elle-même, produit 882, qui, moins 1, est 881, le dernier terme.	1682, la somme de 801 et de 881, premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, multipliée par 20 1/2, la moitié de la somme des racines 20 et 21, produit 34481, la différence des 4es puissances des racines 20 et 21.	34481, la différence trouvée, et 160000, la 4e puissance de 20, additionnées, font 194481, la 4e puissance de la racine 21.
2	.....	.....	16
Transition des mille aux centaines.			
20 21	801, le premier terme. 881, le dernier terme.	1682, la somme de 801 et de 881, multipliée par 20 1/2, la moitié de 20 et de 21, produit 34481, la différence.	34481 et 160000, la 4e puissance de 20, font 194481, la 4e puissance de 21.
Transition des centaines aux dixaines.			
210 211	88201, le premier terme. 89041, le dernier terme.	177242, la somme de 88201 et de 89041, multipl. par 210 1/2, la moitié de 210 et de 211, produit... 37309441, la différence.	37309441 et..... 1944810000, la 4e puissance de 210, font 19821 19441, la 4e puissance de 211.
211 212	89043, le premier terme. 89887, le dernier terme.	178930, la somme de 89043 et de 89887, multipl. par 211 1/2, la moitié de 211 et de 212, produit..... 37843695, la différ.	37843695 et.... 19821 19441, la 4e puissance de 211, font 2019963136, la 4e puissance de 212.

1re COL.	2e COLONNE.	3e COLONNE.	4e COLONNE.
212 213	89889, le premier terme. 90737, le dernier terme.	180626, la somme de 89889 et de 90737, multipl. par 212 1/2, la moitié de 212 et 213, produit..... 38383025, la différence.	38383025 et... 2019963136, la 4e puissance de 212, font 2058346161, l. 4e puissance de 213
Transition des dixaines aux unités.			
2130 2131	9073801, le premier terme. 9082321, le dernier terme.	18156122, la somme de 9073801 et de 9082321, multipliée par 2130 1/2, la moitié de 2130 et de 2131, produit.... 3978161979221, la différence.	3868161792 1 et 20583461610000, l. 4e puissance de... 2130, font..... 20622143227921, l. 4e puissance de... 2131.
2131 2132	9082323, le premier terme. 9090847, le dernier terme.	18173170, la somme de 9082323 et de 9090847, multipliée, par 2131 1/2, la moitié de 2131 et de 2132, produit.... 38736111855, la différence.	3873611 1855 et 20622143227921, la 4e puissance de... 2131, font..... 20660879339776, la 4e puissance de... 2132.
2132 2133	9090849, le premier terme. 9099377, le dernier terme.	18190226 la somme de 9090849 et de 9099377, multipliée par 2132 1/2 la moitié de 2132 et de 2133, produit.... 38790656945, la différence.	3879065694 5 et 20660879339776, l. 4e puissance de... 2132, font..... 20699669996721, la 4e puissance de... 2133.
2133 2134	9099379, le premier terme. 9107911, le dernier terme.	18207290, la somme de 9099379 et de 9107911, multipliée par 2133 1/2, la moitié de 2133 et de 2134, produit.... 38845253215, la différence.	3884525321 5 et 20699669996721 l 4e puissance de... 2133, font..... 20738515249936, la 4e puissance de... 2134.

Après avoir partagé le nombre 207385249936 en quatre tranches, nous devons avoir quatre chiffres à la racine, composée de mille, de centaines, de dixaines et d'unités.

Maintenant, nous voulons opérer sur 20, la tranche le plus à gauche ; 2, la racine de 16, la 4e puissance la plus approchante de 20, la première tranche, exprimera deux mille.

Ensuite, nous opérons sur 207385, les deux premières tranches, 1°. en mettant à la suite de 2, la racine, un zéro, et de 16, sa quatrième puissance, quatre zéros; en sorte que 20 est la racine quatrième de 160000, et en nous servant de 21, la racine suivante, à l'effet d'obtenir la différence comprise entre les quatrièmes puissances des racines 20 et 21, et de trouver la quatrième puissance de 21 ; 2°. en multipliant d'abord 40, le double de 20, la racine précédente, par elle-même, pour avoir 800, qui, plus 1, est 801, le premier terme de ceux qui doivent être calculés pour trouver la différence dont il est ici question ; en multipliant ensuite 42, le double de 21, la racine correspondante dont nous cherchons la quatrième puissance, par elle-même, pour avoir 882, qui, moins 1, est 881, le dernier terme; en multipliant, enfin, 1682, la somme de 801 et de 881, les premier et dernier termes, par $20\frac{1}{2}$, la moitié de la somme des racines 20 et 21, pour avoir 34481, la différence cherchée ; 3°. nous additionnons 34481, cette différence, et 160000, la quatrième puissance de 20; la somme qui résulte de cette addition est 194481, la quatrième puissance de 21, la plus grande que contiennent 207385, les deux premières tranches, puisque 234256, la quatrième puissance de 22, les dépasse.

Puis, pour opérer sur 207385124, les trois premières tranches, 1°. nous mettons un zéro à la suite de 21, la racine qui résulte des deux premières tranches, et quatre zéros à la suite de 194481, sa quatrième puissance; en sorte que 210 est la racine quatrième de 1944810000 ; et nous nous servons de 211, la racine suivante, à l'effet d'obtenir la différence com-

prise entre les quatrièmes puissances des racines 210 et 211, et de trouver finalement la quatrième puissance de 211; 2°. nous multiplions 420, le double de 210, la racine précédente, par elle-même, pour avoir 88200, qui, plus 1, est 88201, le premier terme; nous multiplions ensuite 422, le double de 211, la racine correspondante dont nous cherchons la quatrième puissance, par elle-même, pour avoir 89042, qui, moins 1, est 89041, le dernier terme; nous multiplions enfin 177242, la somme de 88201 et de 89041, les premier et dernier termes, par $210\frac{1}{2}$, la moitié de la somme des racines 210 et 211, pour avoir 37309441, la différence cherchée; 3°. nous additionnons 37309441, cette différence, et... 1944810000, la quatrième puissance de 210; la somme qui résulte de cette addition est 1982119441, la quatrième puissance de 211, que nous soustrayons de 2073851524, les trois premières tranches. Nous voyons que le reste qui résulte de cette soustraction est plus grand que 74618882, le double de 37309441, la dernière différence. Ainsi, nous devons chercher encore la différence comprise entre les quatrièmes puissances des racines 211 et 212 et la 4e puissance de 212. Pour obtenir ces deux opérations, 1°. nous multiplions 422, le double de la racine 211, par elle-même, pour avoir 89042, qui, plus 1, est 89043, le premier terme; et 424, le double de la racine 212, par elle-même, pour avoir 89888, qui, moins 1, est 89887, le dernier terme; 2°. nous multiplions 178930, la somme de 89043 et de 89887, les premier et dernier termes, par $211\frac{1}{2}$, la moitié de la somme des racines 211 et 212, pour avoir 37843695, la différence cherchée; 3°. nous additionnons 37843695, cette différence, et 1982119441, la quatrième puissance de 211; la somme qui provient de cette addition est 2019963136, la 4e puissance de 212. Nous continuons notre opération et nous cherchons la différence comprise entre les quatrièmes puissances des racines 212 et 213, et finalement la quatrième puissance de 213. Pour parvenir à ce double résultat, 1°. nous multiplions 424, le double de

212, la racine précédente, par elle-même, pour avoir 89888, qui, plus 1, est 89889, le premier terme; nous multiplions 426, le double de 213, la racine correspondante dont nous cherchons la quatrième puissance, par elle-même, pour avoir 90738, qui, moins 1, est 90737, le dernier terme; 2°. nous multiplions 180626, la somme de 89889 et de 90737, les premier et dernier termes, par 212 ½, la moitié de la somme des racines 212 et 213, pour avoir 38383025, la différence cherchée; 3°. nous additionnons 38383025, cette différence, et 20199631 36, la quatrième puissance de 212; la somme qui résulte de cette addition est 20583461 61, la quatrième puissance de 213.

Nous soustrayons 20583461 61, la quatrième puissance de 213, de 20738515 24, les trois premières tranches; le reste 155053 63 qui résulte de cette soustraction est un nombre moindre que 38383025, la dernière différence, et par conséquent, que celle plus grande qui la suit immédiatement. Donc, 213 est la racine de 20583461 61, la quatrième puissance la plus approchante de 20738515 24, les trois premières tranches.

Enfin, pour opérer sur 20738515 24 99 36, le nombre entier, 1°. nous mettons un zéro à la suite de 213, la racine, et quatre zéros à la suite de 20583461 61, sa quatrième puissance, en sorte que 2130 est la racine quatrième de 20583461 610000; et nous nous servons de 2131, la racine suivante, à l'effet de chercher la différence comprise entre les quatrièmes puissances des racines 2130 et 2131; et de trouver la quatrième puissance de 2131; 2°. nous multiplions 4260, le double de 2130, la racine précédente, par elle-même, pour avoir 9073800, qui, plus 1, est 9073801, le premier terme; nous multiplions 4262, le double de 2131, la racine correspondante dont nous cherchons la quatrième puissance, par elle-même, pour avoir 9082322, qui, moins 1, est 90822321, le dernier terme; 3°. nous multiplions 18156122, la somme de 9073801 et de 9082321, les premier et dernier

termes, par 2130 $\frac{1}{2}$, la moitié de la somme des racines 2130 et 2131, pour avoir 3868161792 1, la différence cherchée; 4°. nous additionnons 3868161792 1, cette différence, et 20583431616 10000, la quatrième puissance de 2130; la somme qui résulte de cette addition est 20622143227921, la quatrième puissance de 2131.

Pour trouver la différence comprise entre les quatrièmes puissances des racines 2131 et 2132, et puis la quatrième puissance de 2132, 1°. nous multiplions 4272, le double de 2131, la racine précédente, par elle-même, pour avoir 9082322, qui, plus 1, est 9082323, le premier terme; nous multiplions 4264, le double de 2132, la racine correspondante dont nous cherchons la quatrième puissance, par elle-même, pour avoir 9090848, qui, moins 1, est 9090847, le dernier terme; 2°. nous multiplions 18173170, la somme de 9082323 et de 9090847, les premier et dernier termes, par 2131 $\frac{1}{2}$, la moitié de la somme des racines 2131 et 2132, pour avoir 387361111855, la différence cherchée; 3°. nous additionnons 387361111855, cette différence, et 20622143227921, la quatrième puissance de 2131, pour avoir la somme 20660879339776, la quatrième puissance de 2132.

Comme 776359101 60, le reste qui résulte de la soustraction de 20660879339776, la quatrième puissance de 2132, de 20738515249936, le nombre entier, est un nombre plus grand que la dernière différence doublée, alors nous cherchons la différence comprise entre les quatrièmes puissances des racines 2132 et 2133, et puis la quatrième puissance de 2133. Pour les trouver successivement, 1°. nous multiplions 4264, le double de 2132, la racine précédente, par elle-même, pour avoir 9090848, qui, plus 1, est 9090849, le premier terme; nous multiplions 4266, le double de 2133, la racine correspondante dont nous cherchons la quatrième puissance, par elle-même, pour avoir 9099378, qui, moins 1, est 9099377, le dernier terme; 2°. nous multiplions 18190226, la somme de 9090849 et de 9099377, premier et dernier

termes, par 2182 $\frac{1}{2}$, la moitié de la somme des racines 2132 et 2133, pour avoir 3879066945, la différence cherchée; 3°. nous additionnons 3879066945, cette différence, et 20660879339776, la quatrième puissance de 2132, pour avoir la somme 20699669996721, la quatrième puissance de 2133.

Pour trouver la différence comprise entre les quatrièmes puissances des racines 2133 et 2134, et finalement la quatrième puissance de 2134, 1°. nous multiplions 4266, le double de 2133, la racine précédente, par elle-même, pour avoir 9099378, qui, plus 1, est 9099379, le premier terme; nous multiplions 4268, le double de 2134, la racine correspondante dont nous cherchons la quatrième puissance, par elle-même, pour avoir 9107912, qui, moins 1, est 9107911, le dernier terme; 2°. nous multiplions 18207290, la somme de 9099379 et de 9107911, les premier et dernier termes, par 2133 $\frac{1}{2}$, la moitié de la somme des racines 2133 et 2134, pour avoir 38845253215, la différence cherchée; 3°. nous additionnons 38845253215, cette différence et 20699669996721, la quatrième puissance de 2133, pour avoir la somme 28738515249936, la quatrième puissance de 2134, laquelle somme comprend totalement le nombre donné à extraire, qui a pour racine quatrième 2134.

Preuve d'un calcul exact sur l'extraction de la racine quatrième.

Afin de prouver la justesse des règles que nous avons employées à extraire la racine quatrième des nombres donnés, il suffit d'élever successivement les racines extraites de 10980512 et de 207385152499936, les deux nombres dont nous nous sommes servis, à leurs quatrièmes puissances, et d'ajouter, s'il en existe un, le reste. Lorsque ces diverses opérations égalent les nombres donnés à extraire, alors nos règles nous paraîtront aussi certaines que bien faites, pour opérer l'extraction de la racine quatrième d'un nombre quelconque.

Mais afin d'élever les deux racines qui résultent de l'extraction des nombres précités à leurs quatrièmes puissances, nous les additionnerons l'une et l'autre par les neuf chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

I.

102×102
204
000
102
10404, quarré de 102
102×10404
408
000
408
000
102
1061208, cube de 102. Reste..

102×1061208
816
000
204
102
612
000
102
108243216, 4e puissance de 102.
108243216
Reste.. 1561296
Somme. 109804512.

1 = 102
2 = 204
3 = 306
4 = 408
5 = 510
6 = 612
7 = 714
8 = 816
9 = 918.

II.

2134 × 2134
8536
6402
2134
4268
4553956, quarré de 2134.

2134 × 4553956
12804
10670
19206
6402
10670
10670
8536
9718142104, cube de 2134.

1 = 2134
2 = 4268
3 = 6402
4 = 8536
5 = 10670
6 = 12804
7 = 14938
8 = 17072
9 = 19206.

2134 × 9718142104.

8536
0000
2134
4268
8536
2134
17072
2134
14938
19206

207385152499 36, 4e puiss. de 2134.

TABLEAU EXPLICATIF

Pour la formation de la quatrième puissance.

1re COL.	2e COLONNE.	3e COLONNE.	4e COLONNE.
Racines.	Le double de la racine précédente, multiplié par elle-même, donne un produit, qui, plus 1, est le premier terme de ceux qui doivent être calculés pour trouver la différence cherchée. Le double de la racine correspondante dont on veut la 4e puissance, multiplié par elle-même, donne un produit, qui, moins 1, en est le dernier terme.	Chaque somme des premier et dernier termes, multipliée par chaque moitié de la somme des racines précédente et correspondante, produit chaque différence successive, qui a autant de termes de la série primitive que chaque terme correspondant de la même série a d'unités, qui toujours égale chaque somme des racines précédente et correspondante.	Chaque différence successive des termes de la série primitive trouvée et la 1e puissance de la racine précédente, additionnées, font la 4e puissance de la racine suivante.
1	.....	1.	1
2	.....	3, 5, 7 = 15.	16
3	.....	9, 11, 13, 15, 17 = 65.	81

1re col.	2e colonne.	3e colonne.	4e colonne.
3	$6\times3+1=19$, premier terme.	50, la somme de 19 et de $31\times3\,1/_2$, la moitié de 3 et de 4, produit 175, la différence.	175, la différence, et 81, la 4e puissance de 3, font la somme 256, la 4e puissance de 4.
4	$8\times4-1=31$, dernier terme.		
4	$8\times4+1=33$, premier terme.	82, la somme de 33 et de $49\times4\,1/_2$, la moitié de 4 et de 5, produit 369, la différence.	369, la différence, et 256, la 4e puissance de 4, font la somme 625, la 4e puissance de 5.
5	$10\times5-1=49$, dernier terme.		
5	$10\times5+1=51$, premier terme.	122, la somme de 51 et de 71, multipliée par $5\,1/_2$, la moitié de 5 et de 6, produit 671, la différence.	671, la différence, et 625, la 4e puissance de 5, font la somme 1296, la 4e puissance de 6.
6	$12\times6-1=71$, dernier terme.		
6	$12\times6+1=73$, premier terme.	170, la somme de 73 et de 97, multipliée par $6\,1/_2$, la moitié de 6 et de 7, produit 1105, la différence.	1105, la différence, et 1296, la 4e puissance de 6, font la somme 2401, la 4e puissance de 7.
7	$14\times7-1=97$, dernier terme.		
7	$14\times7+1=99$, premier terme.	226, la somme de 99 et de 127, multipliée par $7\,1/_2$, la moitié de 7 et de 8, produit 1695, la différence.	1695, la différence, et 2401, la 4e puissance de 7, font la somme 4096, la 4e puissance de 8.
8	$16\times8-1=127$, dernier terme.		
8	$16\times8+1=129$, premier terme.	290, la somme de 129 et de 161, multipliée par $8\,1/_2$, la moitié de 8 et de 9, produit 2465, la différence.	2465, la différence, et 4096, la 4e puissance de 8, font la somme 6561, la 4e puissance de 9.
9	$18\times9-1=161$, dernier terme.		
9	$18\times9+1=163$, premier terme.	362, la somme de 163 et de 199, multipliée par $9\,1/_2$, la moitié de 9 et de 10, produit 3439, la différence.	3439, la différence, et 6561, la 4e puissance de 9, font la somme 10000, la 4e puissance de 10.
10	$20\times10-1=199$, dernier terme.		

1re COL.	2e COLONNE.	3e COLONNE.	4e COLONNE.
10	20 × 10 + 1 = 201, premier terme.	442, la somme de 201 et de 241, multipliée par 10 1/2, la moitié de 10 et de 11, produit 4641, la différence.	4641, la différence et 10000, la 4e puissance de 10, font la somme 14641, la 4e puissance de 11.
11	22 × 11 − 1 = 241, dernier terme.		
11	22 × 11 + 1 = 243, premier terme.	530, la somme de 243 et de 287, multipliée par 11 1/2, la moitié de 11 et de 12, produit 6095, la différence.	6095, la différence et 14641, la 4e puissance de 11, font la somme 20736, la 4e puissance de 12.
12	24 × 12 − 1 = 287, dernier terme.		
12	24 × 12 + 1 = 289, premier terme.	626, la somme de 289 et de 337, multipliée par 12 1/2, la moitié de 12 et de 13, produit 7825, la différence.	7825, la différence et 20736, la 4e puissance de 12, font la somme 28561, la 4e puissance de 13.
13	26 × 13 − 1 = 337, dernier terme.		
13	26 × 13 + 1 = 339, premier terme.	730, la somme de 339 et de 391, multipliée par 13 1/2, la moitié de 13 et de 14, produit 9855, la différence.	9855, la différence et 28561, la 4e puissance de 13, font la somme 38416, la 4e puissance de 14.
14	28 × 14 − 1 = 391, dernier terme.		
14	28 × 14 + 1 = 393, premier terme.	882, la somme de 393 et de 449, multipliée par 14 1/2, la moitié de 14 et de 15, produit 12209, la différence.	12209, la différence, et 38416, la 4e puissance de 14, font la somme.... 50625, la 4e puissance de 15.
15	30 × 15 − 1 = 449, dernier terme.		
15	30 × 15 + 1 = 451, premier terme.	962, la somme de 451 et de 511, multipliée par 15 1/2, la moitié de 15 et de 16, produit 14911, la différence.	14911, la différence, et 50625, la 4e puissance de 15, font la somme.... 65536, la 4e puissance de 16.
16	32 × 16 − 1 = 511, dernier terme.		
16	32 × 16 + 1 = 513, premier terme.	1090, la somme de 513 et de 577, multipliée par 16 1/2, la moitié de 16 et de 17, produit 17985, la différence.	17985, la différence, et 65536, la 4e puissance de 16, font la somme.... 83521, la 4e puissance de 17.
17	34 × 17 − 1 = 577, dernier terme.		

1re col.	2e colonne.	3e colonne.	4e colonne.
17	$34 \times 17 + 1 = 579$, premier terme.	1226, la somme de 579 et de 647, multipliée par 17 1/2, la moitié de 17 et de 18, produit 21455, la différence.	21455, la différence, et 835a1, la 4e puissance de 17, font la somme.... 104976, la 4e puissance de 18.
18	$36 \times 18 - 1 = 647$, dernier terme.		
18	$36 \times 18 + 1 = 649$, premier terme.	1370, la somme de 649 et de 721, multipliée par 18 1/2, la moitié de 18 et de 19, produit 25345, la différence.	25345, la différence, et 104976, la 4e puissance de 18, font la somme..... 130321, la 4e puissance de 19.
19	$38 \times 19 - 1 = 721$, dernier terme.		
19	$38 \times 19 + 1 = 723$, premier terme.	1522, la somme de 723 et de 799, multipliée par 19 1/2, la moitié de 19 et de 20, produit 29679, la différence.	29679, la différence, et 130321, la 4e puissance de 19, font la somme.... 160000, la 4e puissance de 20.
20	$40 \times 20 - 1 = 799$, dernier terme.		
20	$40 \times 20 + 1 = 801$, premier terme.	1682, la somme de 801 et de 881, multipliée par 20 1/2, la moitié de 20 et de 21, produit 34481, la différence.	34481, la différence, et 160000, la 4e puissance de 20, font la somme.... 194481, 4e la puissance de 21.
21	$42 \times 21 - 1 = 881$, dernier terme.		
21	$42 \times 21 + 1 = 883$, premier terme.	1850, la somme de 883 et de 967, multipliée par 21 1/2, la moitié de 21 et de 22, produit 39775, la différence.	39775, la différence, et 194481, la 4e puissance de 21, font la somme.... 234256, la 4e puissance de 22.
22	$44 \times 22 - 1 = 967$, dernier terme.		
22	$44 \times 22 + 1 = 969$, premier terme.	2026, la somme de 969 et de 1057, multipliée par 22 1/2, la moitié de 22 et de 23, prodnit 45585, la différence.	45585, la différence, et 234256, la 4e puissance de 22, font la somme.... 279841, la 4e puissance de 23.
23	$46 \times 23 - 1 = 1057$, dernier terme.		
23	$46 \times 23 + 1 = 1059$, premier terme.	2210, la somme de 1059 et de 1151, multipliée par.... 23 1/2, la moitié de 23 et de 24, produit 51935, la différence.	51935, la différence, et 279841, la 4e puissance de 23, font la somme..., 331776, la 4e puissance de 24.
24	$48 \times 24 - 1 = 1151$, dernier terme.		

1re. col.	2e colonne.	3e colonne.	4e colonne.
24	$48 \times 24 + 1 = 1153$, premier terme.	2402, la somme de 1153 et de 1249, multipliée par 24 1/2, la moitié de 24 et de 25, produit 58849, la différence.	58849, la différence, et 531776, la 4e puissance de 24, font la somme.... 590625, la 4e puissance de 25.
25	$50 \times 25 - 1 = 1249$, dernier terme.		
25	$50 \times 25 + 1 = 1251$, premier terme.	2602, la somme de 1251 et de 1351, multipliée par 25 1/2, la moitié de 25 et de 26, produit 66351, la différence.	66351, la différence, et 590625, la 4e puissance de 25, font la somme.... 456976, la 4e puissance de 26.
26	$52 \times 26 - 1 = 1351$, dernier terme.		

Si nous voulons avoir la différence comprise entre les quatrièmes puissances des racines 26 et 27, nous cherchons les premier et dernier termes dont la somme multipliée par $26\frac{1}{2}$, la moitié des racines 26 et 27, donne un produit qui est la différence cherchée. Or, afin de la trouver aisément et différemment de la première manière, il suffit d'ajouter deux unités à 1351, le dernier terme qui a coopéré à nous faire obtenir la différence comprise entre les quatrièmes puissances des racines 25 et 26, pour avoir 1353, le premier terme, qui contribuera à nous faire trouver la différence comprise entre les quatrièmes puissances des racines 26 et 27, et d'ajouter au premier terme 1353, 104, le quadruple de 26, la racine précédente, pour avoir 1457, son dernier terme; 2810, la somme de 1353 et de 1457, premier et dernier termes, multipliée par $26\frac{1}{2}$, la moitié de la somme des racines 26 et 27, produit 74465, la différence. 74465, la différence, et 456976, la quatrième puissance de 26, étant additionnés, font 531441, la quatrième puissance de 27. D'après ces principes certains, nous continuons ainsi le tableau précédent.

1re COL.	2e COLONNE.	3e COLONNE.	4e COLONNE.
26	1351 + 2 = 1353, premier terme.	2810, la somme de 1353 et de 1457, multipliée par 26 1/2, la moitié de 26 et de 27, produit 74465, la différence.	74465, la différence, et 456976, la 4e puissance de 26, font 5314 41, la 4e puissance de 27.
27	1353 + 104, le quadruple de 26, = 1457, dernier terme.		
27	1457 + 2 = 1459, premier terme.	3026, la somme de 1459 et de 1567, multipliée par 27 1/2, la moitié de 27 et de 28, produit 83215, la différence.	83215, la différence, et 531441, la 4e puissance de 27, font 614656, la 4e puissance de 28.
28	1459 + 108, le quadruple de 27, = 1567, dernier terme.		
28	1567 + 2 = 1569, premier terme.	3250, la somme de 1569 et de 1681, multipliée par 28 1/2, la moitié de 28 et de 29, produit 92625, la différence.	92625, la différence, et 614656, la 4e puissance de 28, font 707281, la 4e puissance de 29.
29	1569 + 112, le quadruple de 28, = 1681, dernier terme.		
29	1681 + 2 = 1683, premier terme.	3482, la somme de 1683 et de 1799, multipliée par 29 1/2, la moitié de 29 et de 30, produit 102719, la différence.	102719, la différence, et 707281, la 4e puissance de 29, font 810000, la 4e puissance de 30.
30	1683 + 116, le quadruple de 29, = 1799, dernier terme.		
30	1799 + 2 = 1801, premier terme.	3722, la somme de 1801 et de 1921, multipliée par 30 1/2, la moitié de 30 et de 31, produit 113531, la différence.	113521, la différence, et 810000, la 4e puissance de 30, font 923521, la 4e puissance de 31.
31	1801 + 120, le quadruple de 30, = 1921, dernier terme.		
31	1921 + 2 = 1923, premier terme.	3970, la somme de 1923 et de 2047, multipliée par 31 1/2, la moitié de 31 et de 32, produit 125055, la différence.	125055, la différence, et 923521, la 4e puissance de 31, font 1048576, la 4e puissance de 32.
32	1923 + 124, le quadruple de 31, = 2047, dernier terme.		

Nous ne mentionnerons pas les premier et dernier termes de chacune des sommes qui nous font trouver les quatrièmes puissances des racines correspondantes, puisque nous avons décou-

vert que ces mêmes sommes 10, 26, 50, 82, 122, 170, 226, 290, 362, 442, etc., auxquelles nous donnons 2 pour premier terme, sont une suite variable entre elles, et résultent effectivement de la progression arithmétique croissante 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, etc., dont la différence constante est 8. Ainsi, nous pouvons donc reproduire aisément, par l'addition successive de 2, le premier terme, et des termes de cette série, la suite de ces mêmes sommes. D'après cette remarque importante, il faut chercher le terme de la série ci-dessus mentionnée, lequel terme augmenté de 8 et additionné avec la somme précédente, nous donnera la somme qui contribuera à nous faire trouver la différence qui existe entre les quatrièmes puissances des racines 32 et 33. Or, afin de parvenir à connaître ce terme, il faut soustraire l'une de l'autre les deux dernières sommes, c'est-à-dire soustraire 3722, la somme de 1801 et de 1921, premier et dernier termes, de 3970, la somme de 1923 et de 2047, premier et dernier termes, pour avoir 248, terme de la série précitée. Nous observons que chaque terme trouvé doit être augmenté, à chaque opération, de 8, la différence constante. 248 plus 8 font 256, le terme suivant. 256 et 3970, la dernière somme, composent celle de 4226, propre à nous faire trouver la différence qui existe entre les quatrièmes puissances des racines 32 et 33. En effet, 4226, la somme, multipliée par $32\frac{1}{2}$, la moitié des racines 32 et 33, produit 137345, la différence. 137345, la différence, et 1048576, la quatrième puissance de 32, font la somme 1185921, la quatrième puissance de 33.

1re COL.	2e COLONNE.	3e COLONNE.	4e COLONNE.
32 33	248, terme de la série, plus 8, égalent 256, le terme suivant de la même série; 256 et 3970, la dernière somme, font celle de 4226.	4226, la somme, multipliée par.... $32\frac{1}{2}$, la moitié des racines 32 et 33, produit 137345, la différence.	137345, la différence, et 1048576, la 4e puissance de 32, font la somme 1185921, la 4e puissance de 33.

1re COL.	2e COLONNE.	3e COLONNE.	4e COLONNE.
33 34	256, terme de la série, plus 8, égalent 264, le terme suivant de la même série ; 264 et 4226, dernière somme, font celle de 4490.	4490, la somme, multipliée par.... 33 1/2, la moitié des racines 33 et 34, produit 150415, la différence.	150415, la différence, et 1185921, la 4e puissance de 33, font la somme 1336336, la 4e puissance de 34.
34 35	264, terme de la série, plus 8, égalent 272, le terme suivant de la même série ; 272 et 4490, dernière somme, font celle de 4762.	4762, la somme, multipliée par.... 34 1/2, la moitié des racines 34 et 35, produit 164289, la différence.	164289, la différence, et 1336336, la 4e puissance de 34, font la somme 1500625, la 4e puissance de 35.
35 36	272, terme de la série, plus 8, égalent 280, le terme suivant de la même série ; 280 et 4762, dernière somme, font celle de 5042.	5042, la somme, multipliée par.... 35 1/2, la moitié des racines 35 et 36, produit 178991, la différence.	178991, la différence, et 1500625, la 4e puissance de 35, font la somme 1679616, la 4e puissance de 36.
36 37	280, terme de la série, plus 8, égalent 288, le terme suivant de la même série ; 288, et 5042, dernière somme, font celle de 5330.	5330, la somme, multipliée par.... 36 1/2, la moitié des racines 36 et 37, produit 194545, la différence.	194545, la différence, et 1679616, la 4e puissance de 36, font la somme 1874161, la 4e puissance de 37.
37 38	288, terme de la série, plus 8, égalent 296, le terme suivant de la même série ; 296 et 5330, dernière somme, font celle de 5626.	5626, la somme, multipliée par .... 37 1/2, la moitié des racines 37 et 38, produit 210975, la différence.	210975, la différence, et 1874161, la 4e puissance de 37, font la somme 2085136, la 4e puissance de 38.
38 39	296, terme de la série, plus 8, égalent 304, le terme suivant de la même série ; 304 et 5626, dernière somme, font celle de 5930.	5930, la somme, multipliée par.... 38 1/2, la moitié des racines 38 et 39, produit 228305, la différence.	228305, la différence, et 2085136, la 4e puissance de 38, font la somme 2313441, la 4e puissance de 39.
39 40	304, terme de la série, plus 8, égalent 312, le terme suivant de la même série ; 312 et 5930, dernière somme, font celle de 6242.	6242, la somme, multipliée par.... 39 1/2, la moitié des racines 39 et 40, produit 246559, la différence.	246559, la différence, et 2313441, la 4e puissance de 39, font la somme 2560000, la 4e puissance de 40.

1re COL.	2e COLONNE.	3e COLONNE.	4e COLONNE.
40 41	312, terme de la série, plus 8, égalent 320, le terme suivant de la même série; 320 et 6242, dernière somme, font celle de 6562.	6562, la somme, multipliée par.... 40 1/2, la moitié des racines 40 et 41, produit 265761, la différence.	265761, la différence, et 2560000, la 4e puissance de 40, font la somme... 2825761, la 4e puissance de 41.
41 42	320, terme de la série, plus 8, égalent 328, le terme suivant de la même série; 328 et 6562, dernière somme, font celle de 6890.	6890, la somme, multipliée par.... 41 1/2, la moitié des racines 41 et 42, produit 285935, la différence.	285935, la différence, et 2825761, la 4e puissance de 41, font la somme.... 3111696, la 4e puissance de 42.

RÉCAPITULATION.

Des trois manières de calculer les quatrièmes puissances.

Nous avons donné trois manières de calculer les quatrièmes puissances des racines correspondantes, afin d'en faire sentir la facilité et la justesse; nous en faisons l'application sur un seul exemple où nous cherchons la différence comprise entre les quatrièmes puissances des racines 42 et 43, et par suite la quatrième puissance de la racine 43.

La première consiste à multiplier 84, le double de 42, la racine précédente, par elle-même, pour avoir, plus 1, 3529, le premier terme; à multiplier 86, le double de 43, la racine correspondante, par elle-même, pour avoir, moins 1, 3697, le dernier terme; à multiplier 7226, la somme de 3529 et de 3697, premier et dernier termes de ceux qui doivent être calculés, par 42 1/2, la moitié des racines 42 et 43, pour obtenir 307105, la différence comprise entre les quatrièmes puissances des racines 42 et 43, à additionner 307105, la différence, et 3111696, la quatrième puissance de 42, pour trouver la somme 3418801, la quatrième puissance de 43.

La seconde manière consiste à ajouter au dernier terme 3527, deux unités, pour avoir 3529, le premier terme; à additionner 3529, le premier terme, et 168, le quadruple de 42, la racine précédente, pour avoir 3697, le dernier terme; à multiplier 7226, la somme de 3529 et de 3697, premier et dernier termes de ceux qui doivent être calculés, par 42 ½, la moitié des racines 42 et 43, pour obtenir 307105, la différence comprise entre les quatrièmes puissances des racines 42 et 43; à additionner 307105, la différence, et 3111696, la quatrième puissance de 42, pour trouver la somme 3418801, la quatrième puissance 43. Dans la deuxième suite de ce tableau, nous avons remarqué que les quadruples de la racine précédente qui contribuent à former les derniers termes, croissent de quatre en quatre unités, et sont une progression arithmétique dont la différence constante est 4.

La troisième manière consiste à faire voir que toutes les sommes dont chacune est le résultat des premiers et derniers termes de ceux qui doivent être calculés pour trouver les différences, et par suite, les quatrièmes puissances des racines correspondantes, et qui sont 10, 26, 50, 82, etc., auxquelles nous donnons 2 pour premier terme, dérivent effectivement de la progression arithmétique croissante, 0, 8, 16, 24, 32, etc., dont la différence constante est 8. Il est aussi facile de former ces mêmes sommes qui émanent de cette série, que de trouver celle qui nous est nécessaire pour connaître la différence cherchée et la quatrième puissance de la racine correspondante. Mais afin d'obtenir la somme qui nous est nécessaire dans ce calcul, il suffit seulement de soustraire 6562 de 6890, les deux dernières sommes. Le reste qui résulte de cette soustraction est précisément 328, le terme de la progression, auquel il faut ajouter 8, la différence constante, pour avoir 336, le terme suivant. 336, ce terme, et 6890, la dernière somme, étant additionnés, font 7226, la somme, laquelle multipliée par 42 ½, la moitié de celle des racines 42 et 43, produit 307105, la différence cherchée. 307105, cette

différence, et 3111696, la quatrième puissance de 42, font la somme 3418801, la quatrième puissance de 43. Nous donnons cette explication, afin de bien faire connaître cette manière de calculer.

Ces trois manières de calculer les quatrièmes puissances sont coïncidentes.

TABLEAU

Où l'on voit chaque différence des quatrièmes puissances, composée d'autant de termes de la première série que chaque terme correspondant de la même série a d'unités.

1re COL.	2e COL.	3e COLONNE.	4e COLONNE.	5e COLONNE.
Racines. Chaque somme des racines précédente et correspondante égale chaque terme correspondant de la 1re série.	4es puissan.	Les différences égalent les produits de chaque somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, multipliée par la moitié de chaque terme correspondant de la 1re série, inscrite dans la 5e colonne.	Le premier terme de ceux qui sont à calculer égale le produit, plus 1, du double de la racine précédente, multiplié par elle-même. Le dernier terme égale le produit, moins 1, du double de la racine correspondante, multiplié par elle-même.	Chaque terme de la progression génératrice des quarrés indique le nombre de ceux de la série qui sont à calculer, et qui croissent de deux termes en deux termes, pour former chaque différence.
1	1	1	1	1
2	16	15	3, 5, 7	3
3	81	65	9, 11, 13, 15, 17	5
4	256	175	19, 21, 23, 25, 27, 29, 31	7
5	625	369	33, etc... 49	9
6	1296	671	51, etc... 71	11
7	2401	1165	73, etc... 97	13
8	4096	1695	99, etc... 127	15
9	6561	2465	129, etc... 161	17
10	10000	3439	163, etc... 199	19

1re col.	2e colonne.	3e colonne	4e colonne.		5e col.
Racines	4es puissances	Différences.	prem. term.	dern. term.	1re série.
11	14641	4641	201	241	21
12	20736	6095	243	287	23
13	28561	7825	289	337	25
14	38416	9855	339	391	27
15	50635	12209	393	449	29
16	65536	14911	451	511	31
17	83521	17985	513	577	33
18	104976	21455	579	647	35
19	130321	25345	649	721	37
20	160000	29679	723	799	39
21	194481	34481	801	881	41
22	234256	39775	883	967	43
23	279841	45585	969	1057	45
24	331776	51935	1059	1151	47
25	390625	58849	1153	1249	49
26	456976	66351	1251	1351	51
27	531441	74465	1353	1457	53
28	614656	83215	1459	1567	55
29	707281	92625	1569	1681	57
30	810000	102719	1683	1799	59
31	923521	113521	1801	1921	61
32	1048576	125055	1923	2047	63
33	1185921	137345	2049	2177	65
34	1336336	150415	2179	2311	67
35	1500625	164289	2313	2449	69
36	1679616	178991	2451	2591	71
37	1874161	194545	2593	2737	73
38	2085136	210975	2739	2887	75
39	2313441	228305	2889	3041	77
40	2560000	246559	3043	3199	79
41	2825761	265761	3201	3361	81
42	3111696	285935	3363	3527	83
43	3418801	307105	3529	3697	85
44	3748096	329295	3699	3871	87
45	4100625	352529	3873	4049	89

1re col.	2e colonne.	3e colonne	4e colonne.		5e col.
Racines	4es puissances	Différences.	prem. term.	dern. term.	1re série.
46	4477456	376831	4051	4231	91
47	4879681	402225	4233	4417	93
48	5308416	428735	4419	4607	95
49	5764801	456385	4609	4801	97
50	6250000	485199	4803	4999	99
51	6765201	515201	5001	5201	101
52	7311616	546415	5203	5407	103
53	7890481	578865	5409	5617	105
54	8503056	612575	5619	5831	107
55	9150625	647569	5833	6049	109
56	9834496	683871	6051	6271	111
57	10556001	721505	6273	6497	113
58	11316496	760495	6499	6727	115
59	12117361	800865	6729	6961	117
60	12960000	842639	6963	7199	119
61	13845841	885841	7201	7441	121
62	14776336	930495	7443	7687	123
63	15752961	976625	7689	7937	125
64	16777216	1024255	7939	8191	127
65	17850625	1073409	8193	8449	129
66	18974736	1124111	8451	8711	131
67	20151121	1176385	8713	8977	133
68	21381376	1230255	8979	9247	135
69	22667121	1285745	9249	9521	137
70	24010000	1342879	9523	9799	139
71	25411681	1401681	9801	10081	141
72	26873856	1462175	10083	10367	143
73	28398241	1524385	10369	10657	145
74	29986576	1588335	10659	10951	147
75	31640625	1654049	10953	11249	149
76	33362176	1721551	11251	11551	151
77	35153041	1790865	11553	11857	153
78	37015056	1862015	11859	12167	155
79	38950081	1935025	12169	12481	157
80	40960000	2009919	12483	12799	159

1re col.	2e colonne	3e colonne	4e colonne.		5e col.
Racines.	4es puissances	Différences.	prem. term.	dern. term.	1re série
81	43046721	2086721	12801	13121	161
82	45212176	2165455	13123	13447	163
83	47458321	2246145	13449	13777	165
84	49787136	2328815	13779	14111	167
85	52200625	2413489	14113	14449	169
86	54700816	2500191	14451	14791	171
87	57289761	2588945	14793	15137	173
88	59969536	2679775	15139	15487	175
89	62742241	2772705	15489	15841	177
90	65610000	2867759	15843	16199	179
91	68574961	2964961	16201	16561	181
92	71639296	3064335	16563	16927	183
93	74805201	3165905	16929	17297	185
94	78074896	3269695	17299	17671	187
95	81450625	3375729	17673	18049	189
96	84934656	3484031	18051	18431	191
97	88529281	3594625	18433	18817	193
98	92236816	3707535	18819	19207	195
99	96059601	3822785	19209	19601	197
100	100000000	3940399	19603	19999	199

FORMATION

DES TABLEAUX

DES CINQUIÈME, SIXIÈME, SEPTIÈME, HUITIÈME, NEUVIÈME PUISSANCES.

Nous avons élevé les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, successivement à la cinquième, sixième, septième, huitième, neuvième puissances; ensuite nous avons décomposé, par la soustraction, chaque puissance, jusqu'à ce nous ayons trouvé la progression arithmétique de chacune d'elles qui a une différence constante entre tous ses termes. Nous appelons ces progressions arithmétiques, *progressions génératrices*, parce qu'elles sont les principes générateurs de ces mêmes puissances.

Pour les recomposer, nous additionnons, d'après les tableaux suivans, les termes qui vont de droite à gauche. Ainsi leur formation devient facile.

QUATRIÈME TABLEAU.

Racines.	5es puissances = les cubes x les quarrés, ou les quarrés x les cubes.	1res différ.	2es différ.	3es différ.	Progression génératrice, où la différence constante est 120.
1	1	1	0	0	0
2	32	31	30	30	0
3	243	211	180	150	120
4	1024	781	570	390	240
5	3125	2101	1320	750	360

Racines.	5es puissances = les cubes × les quarrés, ou les quarrés × les cubes.	1res différ.	2es différ.	3es différ.	Progression génératrice où la différence constante est 120.
6	7776	4651	2550	1230	480
7	16807	9031	4380	1830	600
8	32768	15961	6930	2550	720
9	59049	26281	10320	3390	840
10	100000	40951	14670	4350	960
11	161051	61051	20100	5430	1080
12	248832	87781	26730	6630	1200
13	371293	122461	34680	7950	1320
14	537824	166631	44070	9390	1440
15	759375	221551	55020	10950	1560
16	1048576	289201	67650	12630	1680
17	1419857	371281	82080	14430	1800
18	1889568	469711	98430	16350	1920
19	2476099	586531	116820	18390	2040
20	3200000	723901	137370	20550	2160

CINQUIÈME TABLEAU.

Racin.	6es puiss. = les cubes des quarrés ou les quarrés des cubes.	1res différ.	2es différ.	3es diff.	4es diff.	Progr. génér. où la différ. const. est 720.
1	1	1	2	0	0	0
2	64	63	62	60	60	0
3	729	665	602	540	480	420
4	4096	3367	2702	2100	1560	1080
5	15625	11529	8162	5460	3360	1800
6	46656	31031	19502	11340	5880	2520

Racin.	6es puiss. = les cubes des quarrés ou les quarrés des cubes.	1res différ.	2es différ.	3es diff.	4es diff.	Prog. géner. où la différ. const. est 720.
7	117649	70993	39962	20460	9120	3240
8	262144	144495	73502	33540	13080	3960
9	531441	269297	124802	51300	17760	4680
10	1000000	468559	199262	74460	23160	5400
11	1771561	771561	303002	103740	29280	6120
12	2985984	1214423	442862	139860	36120	6840
13	4826809	1840825	626402	183540	43680	7560
14	7529536	2702727	861902	235500	51960	8280
15	11390625	3861089	1158362	296460	60960	9000
16	16777216	5386591	1525502	367140	70680	9720
17	24137569	7360353	1973762	448260	81120	10440
18	34012224	9874655	2514302	540540	92280	11160
19	47045881	13033657	3159002	644700	104160	11880
20	64000000	16954119	3920462	761460	116760	12600

SIXIÈME TABLEAU.

Rac.	7es puissances = les 4es puissances x les cubes, ou les cubes x les 4es puissances.	1res différ.	2es différ.	3es différ.	4es différ.	5es diff.
1	1	1	0	6	0	0
2	128	127	126	126	120	120
3	2187	2059	1932	1806	1680	1560
4	16384	14197	12138	10206	8400	6720
5	78125	61741	47544	35406	25200	16800
6	279936	201811	140070	92526	57120	31920
7	823543	543607	341796	201726	109200	52080

puissances es 4es puissances x les bes, ou les es x les 4es issances.	1res différ.	2es différ.	3es différ.	4es différ.	5es diff.	Prog. génér. où la différ. const. est 5o4o
2097152	1273609	730002	388206	186480	77280	25200
4782969	2685817	1412208	682206	294000	107520	30240
10000000	5217031	2531214	1119006	436800	142800	35280
19487171	9487171	4270140	1738926	619920	183120	40320
35831808	16344637	6857466	2587326	848400	228480	45360
62748517	26916709	10572072	3714606	1127280	278880	50400
105413504	42664987	15748278	5176206	1461600	334320	55440
170859375	65445871	22780884	7032606	1856400	394800	60480
268435456	97576081	32130210	9349326	2316720	460320	65520
410338673	141903217	44327136	12196926	2847600	530880	70560
612200032	201881359	59978142	15651006	3454080	606480	75600
893871739	281651707	79770348	19792206	4141200	687120	80640
1280000000	386128261	104476554	24706206	4914000	772800	85680

SEPTI

Racines.	8es puissances = les 4es puissances × elles-mêmes, ou élevées à leurs quarrés.	1res différences.	2es différenc
1	1	1	
2	256	255	25
3	6561	6305	605
4	65536	58975	5267
5	390625	325089	26611
6	1679616	1288991	96390
7	5764801	4085185	279619
8	16777216	11012415	6927230
9	43046721	26269505	1525709
10	100000000	56953279	3068377
11	214358881	114358881	5740560
12	429981696	215622815	10126393
13	815730721	385749025	17012621
14	1475789056	660058335	27430931
15	2562890625	1087101569	42704323
16	4294967296	1732076671	64497510
17	6975757441	2680790145	94871347
18	11019960576	4044203135	136341299
19	16983563041	5963602465	191939933
20	25600000000	8616436959	265283449

HUITIÈ

Racines.	9es puissances = les cubes des cubes.	1res différences.	2es différences.	3es différe
1	1	1	0	0
2	512	511	510	510
3	19683	19171	18660	18150

BLEAU.

différences.	4es différences.	5es différences.	6es différences.	Progress. générat. où la différence constante est 40320.
1	1	1	0	0
253	252	251	250	250
5796	5543	5291	5040	4790
46620	40824	35281	29990	24950
213444	166824	126000	90719	60729
697788	484344	317520	191520	100801
1832292	1134504	650160	332640	141120
3131036	2298744	1164240	514080	181440
3329860	4198824	1900080	735840	221760
5426684	7096824	2898000	997920	262080
7721828	11295144	4198320	1300320	302400
9858332	17136504	5841360	1643040	342720
13862276	25003944	7867440	2026080	383040
18183100	35320824	10316880	2449440	423360
22733924	48550824	13230000	2913120	463680
29931868	65197944	16647120	3417120	504000
38738372	85806504	20608560	3961440	544320
49699516	110961144	25154640	4546080	584640
63086340	141286824	30325680	5171040	624960
79435164	177448824	35162000	5836320	665280

ABLEAU.

différences.	5es différences.	6es différences.	7es différences.	Progress. générat. où la différente constante est 362880.
0	0	0	0	0
510	510	510	510	510
17640	17130	16620	16110	15600

Racines.	9es puissances = les cubes des cubes.	1res différences.	2es différences.	3es diff
4	262144	242461	223290	
5	1953125	1690981	1448520	12
6	10077696	8124571	6433590	49
7	40353607	30275911	22151340	153
8	134217728	93864121	63588210	411
9	387420489	253202761	159338640	957
10	1000000000	612579511	359376750	2006
11	2357947691	1357947691	745368180	3855
12	5159780352	2801832661	1443884970	6981
13	10604499373	5444719021	2642886360	11990
14	20661046784	10056547411	4611828390	19689
15	38443359375	17782312591	7725765180	31139
16	68719476736	30276117361	12493804770	47680
17	118587876497	49868396761	19592282400	70984
18	198359290368	79771413871	29903014110	103107
19	322687697779	124328407411	44556993540	146539
20	512000000000	189312302221	64983894810	204269

La progression génératrice d'une puissance quelconque est une série de termes qui conservent entre eux la même différence, et qui, par cela même, nous font trouver la même puissance.

Il est aisé de connaître la différence des termes de la progression génératrice de chaque puissance en multipliant chaque différence par l'exposant de la puissance suivante. Les exemples suivans feront facilement comprendre cette vérité.

Si nous multiplions 2, qui est la différence constante entre les termes de la progression génératrice de la deuxième puissance, par 3, l'exposant de la troisième puissance, nous obtiendrons 6, qui est la différence constante entre les termes de la progression génératrice de la troisième puissance.

érences.	5es différences.	6es différences.	7es différences.	Progress. générat. où la différence constante est 362880.
86480	168840	151710	135090	118980
20600	834120	665280	513570	378480
59840	2739240	1905120	1239840	726270
32680	6972840	4233000	2328480	1088640
19120	14986440	8013600	3780000	1451520
13560	28594440	13608000	5594400	1814400
87680	49974120	21379680	7771680	2177280
53320	81665640	31691520	10311840	2540160
25360	126572040	44906400	13214880	2903040
84600	187959240	61387200	16480800	3265920
40640	269456040	81496800	20109600	3628800
94760	375054120	105598080	24101280	3991680
02800	509108040	134053920	28455840	4354560
38040	676335240	167227200	33173280	4717440
54080	881816040	205480800	38253600	5080320
47720	1130993640	249177600	43696800	5443200
21840	1429674120	298680480	49502880	5806080

Si nous multiplions 6 par 4, l'exposant de la quatrième puissance, nous obtiendrons 24, qui est la différence constante entre les termes de la progression génératrice de la quatrième puissance.

Ainsi de suite.

De là il résulte que les différences des termes des progressions suivantes, étant successivement multipliées par les exposans 5, 6, 7, 8, 9, etc., croissent beaucoup; que les termes des séries qui les comprennent croissent aussi dans la même proportion. Dans ces différens cas, les séries sont d'autant plus éloignées de leurs puissances dont elles sont les bases, que le nombre des suites insérées entre ces principes générateurs et leurs résultats est grand. Alors les difficultés

augmentent de plus en plus, tant pour la formation des grandes puissances, que pour l'extraction de leurs racines. Dans tous ces calculs, très difficiles, nous considérerons leurs séries, quoiqu'elles en soient les bases, comme une découverte plus curieuse qu'utile, et désormais nous nous servirons des méthodes plus simples et plus expéditives pour trouver l'une et l'autre.

NOUVELLES MÉTHODES

DE FORMER

LES 3es, 4es, 5es, 6es, 7es, 8es, 9es PUISSANCES

ET D'EXTRAIRE LEURS RACINES,

RÉSULTANTES DE LA PROGRESSION ARITHMÉTIQUE CROISSANTE
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ETC., ETC.

NOUVELLE MÉTHODE

DE FORMER LES CUBES

ET D'EXTRAIRE LA RACINE CUBIQUE D'UN NOMBRE QUELCONQUE,

RÉSULTANTE DE LA PROGRESSION ARITHMÉTIQUE 1, 3, 5, 7, ETC., ETC.

CHAPITRE PREMIER.

FORMATION DES CUBES DES NOMBRES 1, 2, 3, 4, 5, 6, ETC., ETC., ET DE LEURS DIXAINES ASCENDANTES.

PREMIÈRE SECTION.

Formation des cubes des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., etc.

Quoique la méthode que nous avons précédemment enseignée de former les cubes et d'extraire la racine cubique d'un nombre quelconque soit la plus naturelle, par la raison qu'elle résulte de la progression génératrice des cubes 0, 6, 12, 18, 24, 30, etc., etc.; cependant nous en faisons connaître une autre qui émane de la progression génératrice des quarrés, afin de faire voir que le calcul numérique, bien examiné et bien approfondi, est fertile en productions essentielles, puisqu'il présente plusieurs moyens sûrs pour arriver à un même but utile pour les sciences mathématiques.

Ainsi, la progression arithmétique croissante, 1, 3, 5, 7, 9, 11, etc., est la progression génératrice des quarrés, dont 2 est la différence constante. Cette série a la propriété immuable de former, en se servant principalement de la règle d'addition, tous les quarrés possibles; cette progression génératrice des quarrés est une suite de termes qui, étant calculés successivement et suivant le même nombre que chaque racine correspondante indique, forme tous les cubes, comme il est aisé de le voir dans le tableau que nous avons fait à ce sujet, et que nous avons mis à la fin de la nouvelle méthode de la formation des cubes et de l'extraction de leurs racines.

La formation des petits cubes peut se faire par l'addition successive des termes de la même progression; mais celle des grands cubes, afin d'accélérer le calcul, doit se faire par la multiplication, qui est une addition abrégée et qui nous donne, avec beaucoup plus de rapidité et autant d'exactitude, les mêmes résultats sur la formation des grands cubes et sur divers nombres dont on cherche les racines cubiques.

Le tableau placé ci-après a quatre colonnes: la première contient les racines indicatives du nombre de termes à calculer pour former les cubes; la seconde contient les termes de la progression génératrice, dont chaque nombre de termes croît dans la même proportion que les racines, et est pris successivement pour former chaque cube, comme il est aisé de le voir en examinant ceux qui correspondent aux dix premières racines; ensuite cette même colonne indique les premier et dernier termes de chaque nombre de ceux qui correspondent successivement aux racines 11, 12 et suivantes; la troisième indique chaque somme des premiers et derniers termes de ceux qui sont à calculer, dont le premier terme est, plus 1, le produit de la racine correspondante par la précédente, le dernier terme égale l'addition du premier terme et du double de la racine précédente; la quatrième fait voir que chaque somme multipliée par la moitié de la racine correspondante produit le cube de cette même racine.

Ainsi, ce tableau montre évidemment que chaque nombre pris successivement des termes de la progression génératrice des quarrés 1, 3, 5, 7, 9, 11, etc., etc., qui croît dans la même proportion que les racines, forme chaque cube de ces mêmes racines. Aussi 3, 5 égalent 8, cube de 2; 7, 9, 11 égalent 27, cube de 3; 13, 15, 17, 19 égalent 64, cube de 4; 21, 23, 25, 27, 29 égalent 125, cube de 5; 31, 33, 35, 37, 39, 41, égalent 216, cube de 6; 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55 égalent 343, cube de 7; 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71 égalent 512, cube de 8; 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89 égalent 729, cube de 9; 91, 93, 95, 97, 99, 101, 103, 105, 107, 109 égalent 1000, cube de 10.

Dès qu'on a la certitude que chaque nombre qui peut former chaque cube a autant de termes pris successivement de la progression génératrice des quarrés que chaque racine correspondante a d'unités; dès que les termes, qui augmentent proportionnellement aux racines, ne peuvent pas être tous placés dans le tableau, nous avons seulement indiqué les premiers et derniers termes de chaque nombre de ceux qu'on doit calculer pour former chaque cube des racines 11, 12 et suivantes. Maintenant il devient indispensable de savoir la manière de trouver, 1°. les premier et dernier termes de chaque nombre; 2°. le produit de chaque nombre, qui toujours égale le cube de la racine correspondante.

D'abord, la multiplication de la racine correspondante, par celle qui précède immédiatement, donne un produit qui, plus 1, est le premier terme du nombre de ceux qu'on doit calculer; l'addition du premier terme et du double de la racine précédente produit le dernier terme. Ensuite, il faut multiplier chaque somme des premier et dernier termes par la moitié de chaque racine correspondante indicative du nombre des termes à calculer, pour avoir un produit qui toujours égale le produit de cette même racine.

Les exemples suivans rendront cette théorie très intelligible.

EXEMPLE I^er.

La multiplication de la racine 11 par 10 produit 110 qui, plus 1, est 111 le premier terme; l'addition de 111 et de 20, le double de 10, la racine précédente, fait 131, le dernier terme. Ensuite, nous multiplions 242, la somme de 111 et de 131, premier et dernier termes par $5\frac{1}{2}$, la moitié de 11 la racine indicative du nombre des termes à calculer, pour avoir 1331, le cube de la racine 11.

EXEMPLE II.

La multiplication de la racine 12 par 11 produit 132, qui, plus 1, est 133, le premier terme; l'addition de 133 et de 22, le double de 11, la racine précédente, fait 155, le dernier terme. Ensuite, nous multiplions 288, la somme de 133 et de 155, premier et dernier termes, par 6, la moitié de 12, la racine indicative du nombre des termes à calculer, pour avoir 1728, le cube de la racine 12.

EXEMPLE III.

La multiplication de la racine 13 par 12 produit 156, qui, plus 1, est 157, le premier terme; l'addition de 157 et de 24, le double de 12, la racine précédente, fait 181, le dernier terme. Ensuite, nous multiplions 338, la somme de 157 et de 181, premier et dernier termes, par $6\frac{1}{2}$, la moitié de 13, la racine indicative du nombre des termes à calculer, pour avoir 2197, le cube de la racine 13.

EXEMPLE IV.

La multiplication de la racine 14 par 13 produit 182, qui, plus 1, est 183, le premier terme; l'addition de 183 et de 26, le double de 13, la racine précédente, fait 209, le dernier terme. Ensuite, nous multiplions 392, la somme de 183 et

de 209, premier et dernier termes, par 7, la moitié de 14, la racine indicative du nombre des termes à calculer, pour avoir 2744, le cube de la racine 14.

DEUXIÈME SECTION.

Transition des unités de la racine aux dixaines.

EXEMPLE V.

Comme nous passons des unités de la racine à ses dixaines, alors, 1°. nous mettons à la suite de 14, la racine, un zéro, et à la suite de 2744, son cube, trois zéros; en sorte que 140 est la racine cubique de 2744000; 2°. nous prenons 141, la racine suivante, dont nous cherchons le cube; 3°. pour le trouver, nous multiplions la racine 141 par 140, la précédente, pour avoir le produit 19740, qui, plus 1, est 19741, le premier terme; l'addition de 19741 et de 280, le double de 140, la racine précédente, fait 20021, le dernier terme; 4°. nous multiplions 39762, la somme de 19741 et de 20021, premier et dernier termes, par $70\frac{1}{2}$, la moitié de 141, la racine indicative du nombre des termes à calculer, pour avoir 2803221, le cube de la racine 141.

EXEMPLE VI.

La multiplication de la racine 142 par 141 produit 20022, qui, plus 1, est 20023, le premier terme; l'addition de 20023 et de 282, le double de 141, la racine précédente, fait 20305, le dernier terme. Ensuite, nous multiplions 40328, la somme de 20023 et de 20305, premier et dernier termes, par 71, la moitié de 142, la racine indicative du nombre des termes à calculer, pour avoir 2863288, le cube de la racine 142.

EXEMPLE VII.

La multiplication de la racine 143 par 142 produit 20306, qui, plus 1, est 20307, le premier terme; l'addition de 20307 et de 284, le double de 142, la racine précédente, fait 20591, le dernier terme. Ensuite nous multiplions 40898, la somme de 20307 et de 20591, premier et dernier termes, par 71 $\frac{1}{2}$, la moitié de 143, la racine indicative du nombre des termes à calculer, pour avoir 2924207, le cube de la racine 143.

Nous observons en général que, lorsqu'on cherche les cubes des racines qui croissent d'unité en unité, de dixaine en dixaine, de centaine en centaine, etc., on obtient facilement le premier terme de chaque nombre, puisqu'il suffit d'ajouter deux unités au dernier terme qui a concouru à former le cube de la racine qui précède immédiatement. Le dernier terme est toujours le résultat de l'addition du premier terme et du double de la racine précédente.

EXEMPLE VIII.

Puisque nous cherchons le cube de la racine 144, 20591, le dernier terme, augmenté de 2, est 20593, le premier terme; l'addition de 20593 et de 286, le double de 143, la racine précédente, produit 20879, le dernier terme. Ensuite nous multiplions 41472, la somme de 20593 et de 20879, premier et dernier termes, par 72, la moitié de 144, la racine indicative du nombre des termes à calculer, pour avoir 2985984, le cube de la racine 144.

TROISIÈME SECTION.

Transition des dixaines de la racine aux centaines.

EXEMPLE IX.

Comme nous passons des dixaines de la racine à ses centaines, alors, 1°. nous mettons à la suite de 144, la racine, un zéro, et à la suite de 2985984, son cube, trois zéros, en sorte que 1440 est la racine cubique de 2985984000; 2°. nous prenons 1441, la racine suivante, dont nous cherchons le cube; 3°. nous multiplions la racine 1441 par 1440, la précédente, pour avoir le produit 2075040, qui, plus 1, est 2075041, le premier terme; l'addition de 2075041 et de 2880, le double de 1440, la racine précédente, fait 2077921, le dernier terme; 4°. nous multiplions 4152962, la somme de 2075041 et de 2077921, premier et dernier termes, par $720\frac{1}{2}$, la moitié de 1441, la racine indicative du nombre des termes à calculer, pour avoir 2992209121, le cube de la racine 1441.

EXEMPLE X.

Puisque nous cherchons le cube de la racine 1442, 2077921, le dernier terme, augmenté de deux unités, est 2077923, le premier terme; l'addition de 2077923 et de 2882, le double de 1441, la racine précédente, fait 2080805, le dernier terme. Ensuite nous multiplions 4158728, la somme de 2077923 et de 2080805, premier et dernier termes, par 721, la moitié de 1442, la racine indicative du nombre des termes à calculer, pour avoir 2998442888, le cube de la racine 1442.

EXEMPLE XI.

Puisque nous cherchons le cube de la racine 1443, 2080805, le dernier terme, augmenté de deux unités, est

2080807, le premier terme; l'addition de 2080807 et de 2884, le double de 1442, la racine précédente, fait 2083691, le dernier terme. Ensuite, nous multiplions 4164498, la somme de 2080807 et de 2083691, premier et dernier termes, par 721 $\frac{1}{2}$, la moitié de 1443, la racine indicative du nombre des termes à calculer, pour avoir 3004685307, le cube de la racine 1443.

EXEMPLE XII.

Puisque nous cherchons le cube de la racine 1444, 2083691, le dernier terme, augmenté de deux unités, est 2083693, le premier terme; l'addition de 2083693 et de 2886, le double de 1443, la racine précédente, fait 2086579, le dernier terme. Ensuite, nous multiplions 4170272, la somme de 2083693 et de 2086579, premier et dernier termes, par 722, la moitié de 1444, la racine indicative du nombre des termes à calculer, pour avoir 3010936384, le cube de la racine 1444.

Dans la transition d'une dixaine de la racine à une autre immédiatement supérieure, nous suivrons toujours les mêmes règles que les précédentes, lesquelles nous font trouver les premier et dernier termes de la progression génératrice des quarrés de chaque nombre de ceux qui doivent être calculés, et qui sont indiqués par chaque racine, et enfin nous font obtenir les cubes des racines correspondantes.

CHAPITRE DEUXIÈME.

EXTRACTION DE LA RACINE CUBIQUE.

Les élémens que nous avons enseignés au sujet de la formation des cubes des racines qui augmentent d'unité en unité, de dixaine en dixaine, de centaine en centaine, etc., sont absolument les mêmes pour l'extraction des racines cubiques.

Ainsi, nous allons les rappeler, et puis les appliquer dans l'extraction de la racine cubique, afin de faire voir combien les principes que nous avons expliqués pour la formation des cubes sont également certains et infaillibles pour extraire la racine cubique d'un nombre quelconque.

D'abord la multiplication de la racine dont nous cherchons le cube, par celle qui la précède immédiatement, donne un résultat qui, plus 1, est le premier terme; la somme du premier terme et du double de la racine précédente est le dernier terme. La multiplication de la somme des premier et dernier termes trouvés, par la moitié de la racine qui indique le nombre des termes à calculer, produit le cube de la racine; ou bien, la multiplication de la moitié de la somme des premier et dernier trouvés, par la racine indicative de leur nombre à calculer, donne le même résultat.

1°. Si nous voulons avoir le cube de 3, la multiplication de 3 par 2, la racine précédente, produit 6, qui, plus 1, est 7, le premier terme; la somme de 7, le premier terme, et de 4, le double de 2, la racine précédente, est 11, le dernier terme. La multiplication de 18, la somme de 7 et de 11, premier et dernier termes, par $1\frac{1}{2}$, la moitié de 3, la racine

qui indique le nombre des termes à calculer, produit 27, cube de 3.

2°. Si nous voulons avoir le cube de 4, la multiplication de 4 par 3, la racine précédente, produit 12, qui, plus 1, est 13, le premier terme; la somme de 13, le premier terme, et de 6, le double de 3, la racine précédente, est 19, le dernier terme. La multiplication de 32, la somme de 13 et de 19, premier et dernier termes, par 2, la moitié de 4, la racine qui indique le nombre des termes à calculer, produit 64, cube de 4.

3°. Si nous voulons avoir le cube de 5, la multiplication de 5 par 4, la racine précédente, produit 20, qui, plus 1, est 21, le premier terme; la somme de 21, le premier terme, et de 8, le double de 4, la racine précédente, est 29, le dernier terme. La multiplication de 50, la somme de 21 et de 29, premier et dernier termes, par 2 $\frac{1}{2}$, la moitié de 5, la racine indicative du nombre des termes à calculer, produit 125, cube de 5.

4°. Lorsqu'on cherche les cubes de la racine qui croît d'unité en unité, de dixaine en dixaine, de centaine en centaine, etc., il suffit d'ajouter deux unités au dernier terme obtenu, pour avoir le premier terme de l'opération suivante. Puisque nous voulons avoir le cube de 6, nous augmentons de deux unités le dernier terme 29, qui a concouru à trouver le cube de 5, pour avoir 31, le premier terme de l'opération qui coopérera à nous faire trouver le cube de 6; la somme de 31, le premier terme, et de 10, le double de 5, la racine précédente, est 41, le dernier terme. La multiplication de 72, la somme de 31 et de 41, premier et dernier termes, par 3, la moitié de 6, la racine indicative du nombre des termes à calculer, produit 216, cube de 6.

5°. Pour avoir le cube de 7, le dernier terme précédent 41, qui, plus 2, est 43, le premier terme; la somme de 43 et de 12, le double de 6, la racine antérieure, est 55, le dernier terme. La multiplication de 98, la somme de 43 et

de 55, premier et dernier termes, par 3 $\frac{1}{2}$, la moitié de 7, la racine indicative du nombre des termes à calculer, produit 343, cube de 7.

6°. Pour avoir le cube de 8, le dernier terme précédent 55, qui, plus 2, est 57, le premier terme; la somme de 57 et de 14, le double de 7, la racine antérieure, est 71, le dernier terme. La multiplication de 128, la somme de 57 et de 71, premier et dernier termes, par 4, la moitié de 8, la racine indicative du nombre des termes à calculer, produit 512, cube de 8.

7°. Pour avoir le cube de 9, le dernier terme précédent 71, qui, plus 2, est 73, le premier terme; la somme de 73 et de 16, le double de 8, la racine antérieure, est 89, le dernier terme. La multiplication de 162, la somme de 73 et de 89, premier et dernier termes, par 4 $\frac{1}{2}$, la moitié de 9, la racine indicative du nombre des termes à calculer, produit 729, cube de 9.

8°. Pour avoir le cube de 10, le dernier terme précédent 89, qui, plus 2, est 91, le premier terme; la somme de 91 et de 18, le double de 9, la racine antérieure, est 109, le dernier terme. La multiplication de 200, la somme de 91 et de 109, premier et dernier termes, par 5, la moitié de 10, la racine indicative du nombre des termes à calculer, produit 1000, cube de 10.

Lorsqu'on passe des unités de la racine à ses dixaines, de ses dixaines à ses centaines, etc., nous mettons, à chaque transition, un zéro à la racine, et trois zéros à son cube, et ensuite nous prenons la racine suivante, dont nous cherchons le cube.

Mais auparavant de faire usage de ces opérations arithmétiques pour l'extraction de la racine cubique d'un nombre quelconque, 1°. nous partageons, de droite à gauche, ce même nombre par tranches de trois chiffres en trois chiffres, en sorte que la tranche le plus à gauche peut n'avoir que deux chiffres, ou même un seul; 2°. nous extrayons la racine

cubique de la tranche le plus à gauche; 3°. nous mettons à la suite de la racine résultante de la première tranche, un zéro, et à la suite de son cube trois zéros, afin d'opérer sur les deux premières tranches; 4°. nous prenons la racine suivante à l'effet d'obtenir son cube, si toutefois celui qui est suivi par trois zéros n'est pas le plus approchant des deux premières tranches; 5°. nous multiplions cette racine cubique par celle qui la précède immédiatement, pour avoir un produit qui, plus 1, sera le premier terme du nombre de ceux qui sont à calculer pour la formation du cube cherché, lequel est exprimé par sa racine; 6°. nous additionnons le premier terme et le double de la racine précédente, pour avoir le dernier terme; 7°. nous multiplions la somme des premier et dernier termes, par la moitié de la racine qui leur correspond, pour avoir un produit qui est réellement le cube de cette même racine. Si ce cube n'est pas le plus approchant des deux premières tranches, alors, afin de l'obtenir, il faut chercher le cube de la racine, augmentée d'une unité. Pour le trouver, 1°. nous multiplions la racine par celle qui la précède immédiatement, à l'effet d'avoir un produit qui sera, plus 1, le premier terme de ceux qui sont à calculer pour la formation du cube cherché, et dont le nombre est exprimé par la racine; 2°. nous additionnons le premier terme et le double de la racine précédente, afin d'avoir le dernier terme; 3°. nous multiplions la somme des premier et dernier termes, par la moitié de la racine qui leur correspond, pour avoir un produit qui est vraiment le cube de cette même racine. Si nous n'avons pas trouvé le plus grand cube des deux premières tranches, nous continuerons ainsi nos opérations jusqu'à ce que nous l'ayons trouvé.

Dans la supposition que le cube trouvé dont on connaît la racine est le plus approchant des deux premières tranches, nous chercherons le plus grand cube des trois premières tranches, celui des quatre premières tranches, etc., et enfin

celui du nombre entier; et nous obtiendrons chacun d'eux, dont nous connaîtrons simultanément chaque racine, en nous conformant strictement aux mêmes règles ci-devant expliquées.

EXEMPLE I^er^.

9, 698, 675.

D'abord, nous partageons le nombre 9698675 en trois tranches; ce partage nous fait voir que la racine cubique, qui doit avoir autant de chiffres que le nombre dont on cherche le plus grand cube a de tranches, aura nécessairement trois chiffres, qui exprimeront des centaines, des dixaines et des unités; ensuite nous extrayons de 9, la tranche la plus à gauche, 2, la racine de 8, cube le plus approchant, laquelle racine exprime 200.

Afin d'opérer sur 9698, les deux premières tranches, 1°. nous mettons à la suite de 2, la racine qui résulte de la première tranche, un zéro, et à la suite de 8, son cube, trois zéros; en sorte que 20 est la racine cubique de 8000. 2°. Comme 8000 n'est pas le cube le plus approchant de 9698, les deux premières tranches, alors nous cherchons celui de 21. 3°. Nous multiplions 21, la racine cubique, par 20, celle qui la précède immédiatement, pour avoir un produit qui, plus 1, est 421, le premier terme de ceux qui sont à calculer pour la formation du cube cherché, et dont le nombre est exprimé par 21, la racine. 4°. Nous additionnons 421, le premier terme, et 40, le double de 20, la racine précédente, pour avoir 461, le dernier terme. 5°. Nous multiplions 882, la somme de 421 et de 461, premier et dernier termes, par 10 $\frac{1}{2}$, la moitié de 21, la racine indicative du nombre des termes à calculer, pour avoir 9261, qui est vraiment le cube de 21, le plus approchant de 9698, les deux premières tranches, puisque 10648, cube de 22, que nous avons obtenu par les mêmes procédés, les dépasse.

Maintenant nous cherchons la racine cubique du nombre entier 9698675. Pour la trouver, 1°. nous mettons à la suite de 21, la racine qui provient des deux premières tranches, un zéro, et à la suite de 9261, son cube, trois zéros; en sorte que 210 est la racine cubique de 9261000. Comme 9261000 n'est pas le cube le plus approchant de 9698675, le nombre entier, alors nous multiplions la racine 211, dont nous cherchons le cube, par 210, la précédente, pour avoir un produit qui, plus 1, est 44311, le premier terme. 3°. Nous additionnons 44311, le premier terme, et 420, le double de 210, la racine précédente, pour avoir 44731, le dernier terme. 4°. Nous multiplions 89042, la somme de 44311 et 44731, premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par $105\frac{1}{2}$, la moitié de 211, la racine indicative de leur nombre, pour avoir 9393931, le cube de 211. Ce cube n'étant pas le plus approchant du nombre 9698675, 1°. nous multiplions 212, la racine correspondante à la troisième puissance que nous cherchons, par 211, la racine précédente, pour avoir, plus 1, 44733, le premier terme; 2°. nous additionnons 44733, le premier terme, et 422, le double de 211, la racine précédente, pour avoir 45155, le dernier terme; 3°. nous multiplions 89888, la somme de 44733 et de 45155, premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 106, la moitié de 212, la racine indicative de leur nombre, pour avoir 9528128, le cube de 212. Ce cube n'étant pas le plus approchant du nombre 9698675, 1°. nous multiplions 213, la racine dont nous cherchons le cube, par 212, la précédente, pour avoir, plus 1, 45157, le premier terme; 2°. nous additionnons 45157, le premier terme, et 424, le double de 212, la racine précédente, pour avoir 45581, le dernier terme; 3°. nous multiplions 90738, la somme de 45157 et de 45581, premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par $106\frac{1}{2}$, la moitié de 213, la racine indicative de leur nombre, pour avoir 9663597, le cube de 213, le plus approchant de 9698675, le nombre

entier, puisque 9800344, cube de 214, le dépasse ; donc, 213 en est la racine cubique.

EXEMPLE II.

719, 323, 136.

Le partage du nombre 719323136 en trois tranches nous montre que la racine aura trois chiffres qui exprimeront des centaines, des dixaines et des unités : 8, la racine de 512, qui est le plus proche cube de 719, la première tranche, exprime 800.

Afin d'opérer sur 719323, les deux premières tranches, 1°. nous mettons à la suite de la racine 8, extraite de la première tranche, un zéro, et à la suite de 512, son cube, trois zéros; en sorte que 80 est la racine cubique de 512000. 2°. Comme 512000 n'est pas le cube le plus approchant de 719323, les deux premières tranches, alors nous cherchons celui de 81. 3°. Nous multiplions 81, la racine cubique, par 80, la précédente, pour avoir, plus 1, 6481, le premier terme. 4°. La somme de 6481, le premier terme, et de 160, le double de 80, la racine précédente, est 6641, le dernier terme. 5°. Nous multiplions 13122, la somme de 6481 et de 6641, premier et dernier termes, par $40\frac{1}{2}$, la moitié de 81, la racine indicative de leur nombre, pour avoir 531441, le cube de 81. Comme ce cube nous paraît éloigné de 719323, les deux premières tranches ; comme chaque opération qui résulte des principes que nous avons établis nous fait obtenir le cube d'une racine quelconque; et comme nous voulons abréger le calcul sur l'extraction de la racine cubique, c'est pourquoi, pour connaître la racine dont nous voulons trouver tout de suite le cube le plus approchant, nous avons soustrait 512000, cube de 80, de 531441, cube de 81, pour avoir la première différence 19441 ; ensuite nous avons soustrait 531441, cube de 81, de 719323, les deux premières tranches, pour avoir la seconde différence 187882 ;

enfin, nous avons divisé 187882, par 19441, et nous avons eu le quotient 9. Alors nous avons cherché le cube de la racine 89. Pour le trouver, 1°. nous avons multiplié la racine 89 par 88, la précédente, pour avoir, plus 1, 7833, le premier terme; 2°. nous avons additionné 7833, le premier terme, et 176, le double de 88, la racine précédente, pour avoir 8009, le dernier terme; 3°. la multiplication de 15842, la somme de 7833 et de 8009, premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 44 $\frac{1}{2}$, la moitié de 89, la racine indicative de leur nombre, a produit 704969, le cube de 89, le plus grand des deux premières tranches.

Pour extraire la racine cubique de 719323136, le nombre entier, 1°. nous mettons à la suite de 89, la racine, un zéro, et à la suite de 704969, son cube, trois zéros; en sorte que 890 est la racine cubique de 704969000. 2°. Comme ce cube n'est pas le plus approchant du nombre entier, alors nous cherchons celui de 891, que nous trouvons en multipliant 891, la racine cubique, par 890, la précédente, dont le produit, plus 1, est 792991, le premier terme; en additionnant 792991, le premier terme, et 1780, le double de 890, la racine précédente, dont la somme est 794771, le dernier terme; en multipliant 1587762, la somme de 792991 et de 794771, premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 445 $\frac{1}{2}$, la moitié de 891, la racine indicative de leur nombre, pour avoir le produit 707347971, cube de 891. Mais afin de savoir si ce cube est bien éloigné du nombre entier 719323136, nous avons soustrait 704969000, cube de 890, de 707347971, cube de 891, nous avons eu la première différence 2378971; ensuite nous avons soustrait 707347971, cube de 891, de 719323136, le nombre entier, nous avons eu la seconde différence 11975165; enfin, nous avons voulu savoir combien de fois 2378971, la première différence, est contenu dans 11975165, la seconde différence; nous avons eu pour résultat cinq fois et le reste 80310. Alors

ious cherchons le cube de 896; pour le trouver, 1°. nous mul-
iplions 896, la racine cubique, par 895, la précédente, pour
voir, plus 1, 801921, le premier terme; 2°. la somme de 801921;
e premier terme, et de 1790, le double de 895, la racine pré-
édente, est 803711, le dernier terme; 3°. nous multiplions
1605632, la somme de 801921 et de 803711, premier et der-
ier termes de ceux qui sont à calculer, par 448, la moitié de
96, la racine indicative de leur nombre, pour avoir 719323136,
ube de 896.

EXEMPLE III.

980, 922, 616, 745.

Nous partageons le nombre 980922616745 en quatre tran-
hes. Ce partage nous fait voir que la racine cubique qui doit
voir autant de chiffres que le nombre dont on cherche le
ube le plus approchant a de tranches, aura nécessaire-
ment quatre chiffres, qui exprimeront des mille, des cen-
aines, des dixaines et des unités; puis nous extrayons 9,
a racine cubique de 729, cube le plus approchant de 980,
a première tranche, laquelle exprime 9000.

Afin d'opérer sur 980922, les deux premières tranches,
1°. nous mettons à la suite de 9, la racine qui provient de
a première tranche, un zéro, et à la suite de 729, son
ube, trois zéros, en sorte que 90 est la racine cubique de
729000. 2°. Comme 729000 n'est pas le cube le plus proche
le 980922, les deux premières tranches, alors nous cherchons
elui de 91. 3°. Nous multiplions 91, la racine cubique, par 90,
a précédente, pour avoir, plus 1, 8191, le premier terme.
4°. La somme de 8191, le premier terme, et de 180, le double
le 90, la racine précédente, est 8371, le dernier terme.
5°. Nous multiplions 1656², la somme de 8191 et de 8371,
premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par
45 ½, la moitié de 91, la racine indicative de leur nombre,
pour avoir 753571, le cube de 91. Comme la première
différence de 729000, cube de 90, et de 753571, cube

de 91, est 24571; et comme la seconde différence de 753571, cube de 91, et de 980922, les deux premières tranches, est 227351; et comme la première différence 24571 est contenue plus de neuf fois dans la seconde différence 227351; alors nous cherchons le cube de 99, que nous trouvons en multipliant la racine cubique 99 par 98, la précédente, pour avoir, plus 1, 9703, le premier terme; en additionnant 9703, le premier terme, et 196, le double de 98, la racine précédente, pour avoir 9899, le dernier terme, et en multipliant 19602, la somme de 9703 et de 9899, premier et dernier termes, par 49 ½, la moitié de 99, la racine indicative de leur nombre, pour avoir le produit 970299, le cube de 99, le plus proche de 980922, les deux premières tranches, puisque 1000000, cube de 100, les dépasse.

Comme nous voulons extraire la racine cubique de 980922616, les trois premières tranches, 1°. nous mettons à la suite de 99, la racine qui provient des deux premières tranches, un zéro, et à la suite de 970299, son cube, trois zéros, en sorte que 990 est la racine cubique de 970299000. Comme ce cube n'est pas le plus proche des trois premières tranches, en ce cas nous cherchons celui de 991. Pour le trouver, 1°. nous multiplions 991, la racine cubique, par 990, la précédente, pour avoir, plus 1, 981091, le premier terme; 2°. la somme de 981091, le premier terme, et de 1980, le double de 990, la racine précédente, est 983071, le dernier terme; 3°. nous multiplions 1964162, la somme de 981091 et de 983071, premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 495 ½, la moitié de 991, la racine indicative de leur nombre, pour avoir 973242271, cube de 991. Puisque nous voulons savoir quelle est la racine du cube le plus grand de 980922616, les trois premières tranches, alors nous soustrayons 970299000, cube de 990, de 973242271, cube de 991, et nous avons la première différence 2943271, puis nous soustrayons 973242271, cube de 991, de 980922616, les trois premières tranches; nous avons la

seconde différence 7680345; enfin, nous divisons 7680345, la seconde différence, par 2943271, la première différence; le quotient qui résulte de cette division est 2, et un reste moindre que 2943271, la première différence. Alors nous cherchons le cube de 993, que nous trouvons, 1°. en multipliant 993, la racine cubique, par 992, la précédente, pour avoir, plus 1, 985057, le premier terme; 2°. en additionnant 985057, le premier terme, et 1984, le double de 992, la racine précédente, pour avoir 987041, le dernier terme; 3°. en multipliant 1972098, la somme de 985057 et de 987041, premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 496 $\frac{1}{2}$, la moitié de 993, la racine indicative de leur nombre, pour avoir 979146657, cube de 993, le plus proche de 980922616, les trois premières tranches, parce que 982107784, cube de 994, les dépasse.

Dès que nous voulons obtenir la racine cubique du nombre entier 980922616745, 1°. nous plaçons à la suite de 993, la racine cubique, un zéro, et à la suite de 979146657, son cube, trois zéros, en sorte que 9930 est la racine cubique de 979146657000; 2°. comme ce cube n'est pas le plus grand que contient le nombre entier, alors nous cherchons le cube de 9931, que nous trouvons ainsi : 3°. nous multiplions 9931, la racine cubique, par 9930, la précédente, pour avoir, plus 1, 98614831, le premier terme; 4°. nous additionnons 98614831, le premier terme, et 19860, le double de 9930, la racine précédente, pour avoir 98634691, le dernier terme; 5°. nous multiplions 197249522, la somme de 98614831 et de 98634691, premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 4965 $\frac{1}{2}$, la moitié de 9931, la racine indicative de leur nombre, pour avoir 979442501491, cube de 9931. Mais puisque ce cube n'est pas le plus grand du nombre entier, alors, pour le connaître par approximation, nous soustrayons 979146657000, cube de 9930, de 979442501491, cube de 9931; nous avons la première différence 295844491; ensuite nous soustrayons 979442501491, cube de 9931, de

980922616745, le nombre entier; nous avons la seconde différence 1480115254; nous divisons 1480115254, la seconde différence, par 29584491, la première différence; le quotient est 5, qui nous paraît trop grand; alors nous ajouterons 4 à la racine 9931, et nous chercherons le cube de 9935, que nous trouvons en multipliant 9935, la racine cubique, par 9934, la précédente, pour avoir, plus 1, 98694291, le premier terme; en additionnant 98694291, le premier terme, et 19868, le double de 9934, la racine précédente, dont la somme est 98714159, le dernier terme; en multipliant 197408450, la somme de 98694291 et de 98714159, premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 4967 $\frac{1}{2}$, la moitié de 9935, la racine indicative de leur nombre, pour avoir 980626475375, cube de 9935. Ce cube est le plus grand que contient 980922616745, le nombre entier, puisque 980922617856, cube de 9936, le dépasse.

EXEMPLE IV.

990, 278, 672, 643, 177, 749.

Le partage du nombre 990278672643177749 en six tranches, nous montre que la racine cubique qui doit avoir autant de chiffres que le nombre dont on cherche le cube a de tranches, aura nécessairement six chiffres, qui exprimeront des cent mille, des dix mille, des mille, des centaines, des dixaines et des unités. De là il suit que 9, la racine cubique de 729, le cube le plus approchant de 990, la première tranche, exprime neuf cent mille.

Afin d'opérer sur 990278, les deux premières tranches, 1°. nous mettons à la suite de 9, extrait de la première tranche, un zéro, et à la suite de 729, son cube, trois zéros, en sorte que 90 est la racine cubique de 729000. 2°. Comme ce cube n'est pas le plus approchant des deux premières tranches, alors nous cherchons celui de 91, que nous trouvons en multipliant 91, la racine cubique, par 90, la pré-

cédente, pour avoir, plus 1, 8191, le premier terme; en additionnant 8191, le premier terme, et 180, le double de 90, la racine précédente, dont la somme est 8371, le dernier terme; en multipliant 16562, la somme de 8191 et de 8371, premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par $45\frac{1}{2}$, la moitié de 91, la racine indicative de leur nombre, dont le produit est 753571, le cube de 91. Pour connaître la quantité d'unités que nous devons ajouter à la racine 91, nous soustrayons 729000, cube de 90, de 753571, cube de 91; nous avons la première différence 24571; puis nous soustrayons 753571, cube de 91, de 990278, les deux premières tranches; la seconde différence est 236707; le quotient qui résulte de la division de la seconde différence 236707, par la première différence 24571, nous montre que nous pouvons chercher le cube de 99. Pour le trouver, 1°. nous multiplions 99, la racine cubique, par 98, la précédente, pour avoir, plus 1, 9703, le premier terme; 2°. la somme de 9703, le premier terme, et de 196, le double de 98, la racine précédente, est 9899, le dernier terme; 3°. nous multiplions 19602, la somme de 9703 et de 9899, premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par $49\frac{1}{2}$, la moitié de 99, la racine indicative de leur nombre, pour avoir 970299, le cube de 99, le plus grand que contiennent les deux premières tranches 990278, puisque 1000000, cube de 100, les dépasse.

Dès que nous voulons extraire la racine cubique de 99027867 2, les trois premières tranches, 1°. nous mettons à la suite de 99, la racine extraite des deux premières tranches, un zéro, et à la suite de 970299, son cube, trois zéros, en sorte que 990 est la racine cubique de 970299000. Comme ce cube n'est pas le plus grand des trois premières tranches, alors nous cherchons celui de 991, que nous trouvons ainsi: 3°. nous multiplions 991, la racine cubique, par 990, la précédente, pour avoir, plus 1, 981091, le premier terme; 4°. nous additionnons 981091, le premier terme, et 1980,

le double de 990, la racine précédente, pour avoir 983071, le dernier terme; 5°. nous multiplions 1964162, la somme de 981091 et de 983071, premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 495 $\frac{1}{2}$, la moitié de 991, la racine indicative de leur nombre; nous avons le produit 973242271, cube de 991. Ayant soustrait 970299000, cube de 990, de 973242271, cube de 991, nous avons la première différence 2943271; puis ayant soustrait 973242271, cube de 991, de 990278672, les trois premières tranches, nous avons la seconde différence 1703640 1; le quotient qui résulte de la division de 1703640 1, la seconde différence, par 2943271, la première différence, est à peu près 5. Ainsi, nous allons chercher le cube de 996, que nous trouvons de cette manière: 1°. nous multiplions 996, la racine cubique, par 995, la précédente, pour avoir, plus 1, 991021, le premier terme; 2°. nous additionnons 991021, le premier terme, et 1990, le double de 995, la racine précédente, pour avoir 993011, le dernier terme; 3°. nous multiplions 1984032, la somme de 991021 et de 993011, premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 498, la moitié de 996, la racine indicative de leur nombre, pour avoir 988047936, le cube de 996, le plus grand que 990278672, les trois premières tranches, contiennent, puisque 991026973, cube de 997, les dépasse.

Voulant extraire la racine cubique de 990278672643, les quatre premières tranches, 1°. nous mettons à la suite de 996, la racine extraite des trois premières tranches, un zéro, et à la suite de 988047936, son cube, trois zéros, en sorte que 9960 est la racine cubique de 988047936000, qui n'est pas le plus proche des quatre premières tranches; 2°. nous cherchons celui de 9961, que nous trouvons en multipliant 9961, la racine cubique, par 9960, la précédente, pour avoir, plus 1, 992115 61, le premier terme; en additionnant 992115 61 et 19920, le double de 9960, la racine précédente, pour avoir 992314 81, le dernier terme;

en multipliant 198443042, la somme de 99211561 et de 99231481, premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 4980 $\frac{1}{2}$, la moitié de 9961, la racine indicative de leur nombre, pour avoir 9883455706 81, le cube de 9961. La soustraction de 988047936000, cube de 9960, de 9883455706 81, cube de 9961, donne pour première différence 297634681; la soustraction de 9883455706 81, cube de 9961, de 99027867 2643, les quatre premières tranches, donne pour seconde différence 1933101962; la division de la seconde différence 1933101962, par la première différence 297634681, donne 6 pour quotient. D'après ce calcul, nous cherchons le cube de 9967, que nous trouvons ainsi : 1°. nous multiplions 9967, la racine cubique, par 9966, la précédente, pour avoir, plus 1, 99331123, le premier terme; 2°. nous additionnons 99331123, le premier terme, et 19932, le double de 9966, la racine précédente, pour avoir 99351055, le dernier terme; 3°. nous multiplions 1986821 78, la somme de 99331123 et de 99351055, premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 4983 $\frac{1}{2}$, la moitié de 9967, la racine indicative de leur nombre, pour avoir 99013263 4063, cube de 9967, le plus approchant de 99027867 2643, les quatre premières tranches, puisque 99043068 7232, cube de 9968, les dépasse.

Voulant extraire la racine cubique de 99027867 2643177, les cinq premières tranches, 1°. nous mettons à la suite de 9967, la racine, un zéro, et à la suite de 99013263 4063, son cube, trois zéros, en sorte que 99670 est la racine cubique de 99013263 4063000. Ce cube n'étant pas le plus approchant des cinq premières tranches, nous cherchons celui de 99671. Pour trouver ce cube, 2°. nous multiplions 99671, la racine cubique, par 99670, la précédente, pour avoir, plus 1, 99342085 71, le premier terme; puis nous additionnons 99342085 71, le premier terme, et 199340, le double de 99670, la racine précédente, pour avoir 99344079 11, le dernier terme; enfin, nous multiplions 1986861648 2, la

somme de 9934208571 et de 9934407911, premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 49835 $\frac{1}{2}$, la moitié de 99671, la racine indicative de leur nombre, pour avoir 9901624366887 11, le cube de 99671. Il résulte de la soustraction de 9901326340630 00, cube de 99670, de 9901624366887 11, cube de 99671, la première différence 29802625711, et de celle de 9901624366887 11, cube de 99671, de 9902786726431 77, les cinq premières tranches, la seconde différence 11623595446 6. Il résulte aussi de la division de la seconde différence par la première, le quotient 3. Ainsi, nous cherchons le cube de 99674, que nous trouvons, 1°. en multipliant 99674, la racine cubique, par 99673, la précédente, pour avoir, plus 1, 9934806603, le premier terme; 2°. en additionnant 9934806603, le premier terme, et 199346, le double de 99673, la racine précédente, pour avoir 9935005949, le dernier terme; 3°. en multipliant 19869812552, la somme de 9934806603 et de 9935005949, premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 49837, la moitié de 99674, la racine indicative de leur nombre, pour avoir 9902518481540 24, cube de 99674, le plus grand que contiennent 9902786726431 77, les cinq premières tranches, puisque 9902816531718 75, cube de 99675, les excède.

Enfin, nous cherchons à extraire la racine cubique de 9902786726431 77749, le nombre entier, laquelle nous parviendrons à connaître, 1°. en mettant à la suite de 99674, la racine, un zéro, et à la suite de 9902518481540 24, son cube, trois zéros, en sorte que 996740 est la racine cubique de 9902518481540 24000. 2°. Nous voulons employer une manière bien différente de celle dont nous nous sommes servis jusqu'à présent pour connaître le cube d'une racine quelconque : cette manière consiste à additionner la différence, laquelle égale le triple quarré de la racine, moins la racine triplée, plus 1, et le cube de la racine précédente, pour avoir le cube de la racine suivante. Ainsi, la différence

980474873021, laquelle égale 2980477863243, le triple carré de 996741, moins 2990223, cette racine triplée, plus 1, et 990250848154024000, cube de 996740, étant additionnés, ont 990254828628897021, cube de 996741. Mais afin de connaître la quantité d'unités que nous devons ajouter à 99674, la racine cubique, nous avons soustrait 990254828628897021, cube de 996741, de 990278672643177749, le nombre entier, pour avoir la seconde différence 2384401428o728; puis nous divisons la seconde différence 2384401428o728, par la première différence 980474873021, que nous avons obtenue de la manière ci-dessus expliquée, pour avoir le quotient 8. En conséquence, nous cherchons celui de 996749, que nous trouvons ainsi: 1°. nous multiplions 996749, la racine cubique, par 996748, la précédente, pour avoir, plus 1, 993507572253, le premier terme; 2°. nous additionnons 993507572253, le premier terme, et 1993496, le double de 996748, la racine précédente, pour avoir 993509565749, le dernier terme; 3°. nous multiplions 198701713800 2, la somme de 993507572253 et de 993509565749, les premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 498374 $\frac{1}{2}$, la moitié de 996749, la racine indicative de leur nombre, pour avoir 990278672643177749, le nombre entier, qui est un cube parfait, et qui a pour racine 996749.

OBSERVATIONS.

La méthode que nous avons donnée d'extraire la racine cubique est précisément celle que nous avons employée pour former les cubes. Les quatre exemples précédens pourraient faire croire que les règles qui y sont contenues sont longues et difficiles. Cependant, dans chaque transition des cent mille aux dix mille, des dix mille aux mille, des mille aux centaines, des centaines aux dixaines, des dixaines aux unités, elles sont les mêmes, et se réduisent, 1°. à mettre à la suite de la racine trouvée un zéro, et à la suite de son cube trois zéros; 2°. à prendre la racine suivante, et à

la multiplier par la précédente, pour avoir un produit qui plus 1, est le premier terme; 3°. à additionner le premier terme et le double de la racine précédente, pour avoir le dernier terme; 4°. à multiplier la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par la moitié de la racine indicative de leur nombre et dont on cherche le cube; pour avoir le cube de cette même racine, nous employons ces règles, qui, à chaque opération, sont uniformes pour trouver le plus grand cube de chaque tranche et du nombre entier, dont nous connaissons simultanément la racine.

TABLEAU EXPLICATION

Tant pour la formation des cubes des nombres que pour l'extraction de leurs racines.

1re COL.	2e COLONNE.	3e COLONNE.	4e COLONNE.
Chaque racine indique chaque nombre successif des termes à calculer pour former chaque cube.	Les termes de la progression génératrice des quarrés 1, 3, 5, 7, etc., etc., correspondans aux dix premières racines, sont exprimés par chaque nombre successif, pour montrer qu'ils croissent comme les racines, et que chaque nombre se succède l'un après l'autre; les premiers et derniers termes du nombre de ceux qui suivent immédiatement, et qui croissent aussi dans la même proportion que les racines, sont seulement indiqués.	Indication de chaque somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, dont le premier terme égale, plus 1, le produit de la racine correspondante, par la précédente; le dernier terme égale la somme du premier terme et du double de la racine précédente.	Chaque somme des premier et dernier termes, multipliée par la moitié de la racine correspondante, donne un produit, qui est le cube de cette même racine.
Racin.	Termes de la progress. génerat.	Sommes des premiers et dern. termes.	Cubes.
1	1	....	1
2	3, 5,	8	8
3	7, 9, 11	18	27
4	13, 15, 17, 19	32	64

1re col.	2e colonne.		3e colonne.	4e colonne.
Racines.	Premiers termes.	Derniers termes.	Sommes des premiers et dern. termes.	Cubes.
5	21	29	50	125
6	31	41	72	216
7	43	55	98	343
8	57	71	128	512
9	73	89	162	729
10	91	109	200	1000
11	111	131	242	1331
12	133	155	288	1728
13	157	181	338	2197
14	183	209	392	2744
15	211	239	450	3375
16	241	271	512	4096
17	273	305	578	4913
18	307	341	648	5832
19	343	379	722	6859
20	381	419	800	8000
21	421	461	882	9261
22	462	505	968	10648
23	507	551	1058	12167
24	553	599	1152	13824
25	601	649	1250	15625
26	651	701	1352	17576
27	703	755	1458	19683
28	757	811	1568	21952
29	813	869	1682	24389
30	871	929	1800	27000
31	931	991	1922	29791
32	993	1055	2048	32768
33	1057	1121	2178	35937
34	1123	1189	2312	39304

1re col.	2e colonne.		3e colonne.	4e colonne.
Racines.	Premiers termes.	Derniers termes.	Sommes des premiers et dern. termes.	Cubes.
35	1191	1259	2450	42875
36	1261	1331	2592	46656
37	1333	1405	2738	50653
38	1407	1481	2888	54872
39	1483	1559	3042	59319
40	1561	1639	3200	64000
41	1641	1721	3362	68921
42	1723	1805	3528	74088
43	1807	1891	3698	79507
44	1893	1979	3872	85184
45	1981	2069	4050	91125
46	2071	2161	4232	97336
47	2163	2255	4418	103823
48	2257	2351	4608	110592
49	2353	2449	4802	117649
50	2451	2549	5000	125000
51	2551	2651	5202	132651
52	2653	2755	5408	140608
53	2756	2861	5618	148877
54	2863	2969	5832	157464
55	2971	3079	6050	166375
56	3081	3191	6272	175616
57	3193	3305	6498	185193
58	3307	3421	6728	195112
59	3423	3539	6962	205379
60	3541	3659	7200	216000
61	3661	3781	7442	226981
62	3783	3905	7688	238328
63	3907	4031	7938	250047
64	4033	4159	8192	262144

1re COL.	2e COLONNE.		3e COLONNE.	4e COLONNE.
Racines.	Premiers termes.	Derniers termes.	Sommes des premiers et dern. termes.	Cubes.
65	4161	4289	8450	274625
66	4291	4421	8712	287496
67	4423	4555	8978	300763
68	4557	4691	9248	314432
69	4693	4829	9522	328509
70	4831	4969	9800	343000
71	4971	5111	10082	357911
72	5113	5255	10368	373248
73	5257	5401	10658	389017
74	5403	5549	10952	405224
75	5551	5699	11250	421875
76	5701	5851	11552	438976
77	5853	6005	11858	456533
78	6007	6161	12168	474552
79	6163	6319	12482	493039
80	6321	6479	12800	512000
81	6481	6641	13122	531441
82	6643	6805	13448	551368
83	6807	6971	13778	571787
84	6973	7139	14112	592704
85	7141	7309	14450	614125
86	7311	7481	14792	636056
87	7483	7655	15138	658503
88	7657	7831	15488	681472
89	7833	8009	15842	704969
90	8011	8189	16200	729000
91	8191	8371	16562	753571
92	8373	8555	16928	778688
93	8557	8741	17298	804357
94	8743	8929	17672	830584

1re col.	2e colonne.		3e colonne.	4e colonne.
Racines.	Premiers termes.	Derniers termes.	Sommes des premiers et dern. termes.	Cubes.
95	8931	9119	18050	857375
96	9121	9311	18432	884736
97	9313	9505	18818	912673
98	9507	9701	19208	941192
99	9703	9899	19602	970299
100	9901	10099	20000	1000000

FORMATION

DE LA QUATRIÈME PUISSANCE

ET EXTRACTION DE SA RACINE,

RÉSULTANTE DE LA PROGRESSION ARITHMÉTIQUE 1, 3, 5, 7, ETC., ETC.

CHAPITRE PREMIER.

FORMATION DE LA QUATRIÈME PUISSANCE.

PREMIÈRE SECTION.

Formation de la quatrième puissance des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, etc., etc.

Pour former les quatrièmes puissances des nombres naturels, selon notre nouvelle méthode, nous avons un moyen sûr et facile qui provient de la manière de calculer la progression génératrice des quarrés 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, etc. La formation de la quatrième puissance et l'extraction de sa racine sont tellement corrélatives, que leurs principes sont identiques. La progression génératrice des quarrés peut être considérée comme une série de termes qui nous fait obtenir simultanément les racines et les puissances de tous les degrés. La nouvelle méthode qui nous fait trouver les quatrièmes puissances des nombres naturels et simultanément leurs racines, nous semble dériver de cette propriété géné-

rale. En conséquence, nous avons fait un tableau que nous avons placé à la fin, et qui nous a servi pour développer et poser les principes relatifs à cette nouvelle méthode.

Ce tableau a quatre colonnes : la première contient les racines ; la seconde, les quarrés des racines indiquent le nombre des termes de la progression génératrice des quarrés qu'on doit calculer pour trouver les quatrièmes puissances des racines correspondantes ; la troisième, chaque quarré doublé égale la somme du premier terme qui est toujours un, et du dernier terme de ceux qui sont à calculer, pour former chaque quatrième puissance ; la quatrième, chaque quarré doublé, multiplié par la moitié de chacun de ces mêmes quarrés, produit la quatrième puissance de chaque racine correspondante.

Conformément à ce tableau, nous disons que le quarré de chaque racine indique le nombre des termes à calculer, pour trouver exactement la quatrième puissance de cette même racine.

4, le quarré de la racine 2, indique que les 4 termes 1, 3, 5, 7, additionnés, font 16, la quatrième puissance de 2.

9, le quarré de la racine 3, indique que les 9 termes 1, 3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, additionnés, font 81, la quatrième puissance de 3.

16, le quarré de la racine 4, indique que les 16 termes 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, additionnés, font 256, la quatrième puissance de 4.

25, le quarré de la racine 5, indique que les 25 termes 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, additionnés, font 625, la quatrième puissance de 5.

36, le quarré de la racine 6, indique que les 36 termes 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, additionnés, font 1296, la quatrième puissance de 6.

Comme l'addition deviendrait longue et pénible, lorsque le quarré de la racine indiquerait une grande quantité de termes à calculer, alors nous emploierons la multiplication, qui est une addition abrégée, et qui par cela même produit avec plus de rapidité les mêmes résultats. Or, afin d'employer la multiplication, nous savons, 1°. que le quarré exprime toujours le nombre des termes de la progression génératrice des quarrés 1, 3, 5, 7, etc., etc., qui doivent être calculés pour former la quatrième puissance de chacune de ces mêmes racines; 2°. que l'unité, dans tous les cas possibles, est toujours le premier terme; 3°. que chaque dernier terme, absolument nécessaire pour trouver la quatrième puissance de chaque racine, égale le double moins un de chaque quarré correspondant; 4°. que le quarré doublé égalant la somme des premier et dernier termes du nombre de ceux qui sont à calculer, multiplié par la moitié du quarré, donne un produit qui est vraiment la quatrième puissance de la racine.

D'après ces principes établis, nous chercherons les quatrièmes puissances de quelques racines.

49, le quarré de la racine 7, indique qu'il faut calculer 49 termes de la progression génératrice des quarrés, afin d'avoir la quatrième puissance de 7. Nous la trouvons ainsi, 1°. en prenant le double moins un du quarré 49, pour avoir 97, le quarante-neuvième et dernier terme; 2°. en multipliant 98, la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer par $24\frac{1}{2}$, la moitié du quarré 49 et du nombre des termes à calculer, à l'effet d'obtenir 2401, la quatrième puissance de 7.

64, le quarré de la racine 8, indique qu'il faut calculer, 64 termes de la progression génératrice des quarrés, afin d'avoir la quatrième puissance de 8. Nous la trouvons ainsi, 1°. en prenant le double moins un du quarré 64, pour avoir 127, le soixante-quatrième et dernier terme; 2°. en multipliant 128, la somme des premier et der-

nier termes de ceux qui sont à calculer, par 32, la moitié du quarré 64 et du nombre des termes à calculer, à l'effet d'obtenir 4096, la quatrième puissance de 8.

81, le quarré de la racine 9, indique qu'il faut calculer 81 termes de la progression génératrice des quarrés, afin d'avoir la quatrième puissance de 9. Nous la trouvons ainsi, 1°. en prenant le double moins un du quarré 81, pour avoir 161, le cent-vingt-unième et dernier terme; 2°. en multipliant 162, la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par $40\frac{1}{2}$, la moitié du quarré 81, et du nombre des termes, à l'effet d'obtenir 6561, la quatrième puissance de 9.

100, le quarré de la racine 10, indique qu'il faut calculer 100 termes de la progression génératrice des quarrés, afin d'avoir la quatrième puissance de 10. Nous la trouvons ainsi, 1°. en prenant le double moins un du quarré 100, pour avoir 199, le centième et dernier terme; 2°. en multipliant 200, la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 50, la moitié du quarré 100 et du nombre des termes à calculer, à l'effet d'obtenir 10000, la quatrième puissance de 10.

121, le quarré de la racine 11, indique qu'il faut calculer 121 termes de la progression génératrice des quarrés, afin d'avoir la quatrième puissance de 11. Nous la trouvons ainsi, 1°. en prenant le double moins un du quarré 121, pour avoir 241, le cent-vingt-unième et dernier terme; 2°. en multipliant 242, la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par $60\frac{1}{2}$, la moitié du quarré 121 et du nombre des termes à calculer, à l'effet d'obtenir 14641, la quatrième puissance de 11.

144, le quarré de la racine 12, indique qu'il faut calculer 144 termes de la progression génératrice des quarrés, afin d'avoir la quatrième puissance de 12. Nous la trouvons ainsi; 1°. en prenant le double moins un du quarré 144, pour avoir 287, le cent-quarante-quatrième et dernier

terme ; 2°. en multipliant 288, la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 72, la moitié du quarré 144 et du nombre des termes à calculer, à l'effet d'obtenir 20736, la quatrième puissance de 12.

DEUXIÈME SECTION.

Transition des unités aux dixaines ascendantes.

Pour passer des unités de la racine, dont nous avons trouvé les quatrièmes puissances, aux dixaines dont nous allons indiquer la manière d'obtenir leurs quatrièmes puissances, il faut, 1°. mettre un zéro à la suite de 12, la racine, et deux zéros à la suite de 144, son quarré, en sorte que 120 est la racine de 14400, quarré indicatif du nombre des termes à calculer ; 2°. prendre 28800, le double du quarré précité, et la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, que nous multiplions par 7200, la moitié du quarré 14400 et la moitié de leur nombre, pour avoir 207360000, la quatrième puissance de 120.

Comme chaque terme de la progression génératrice égale le double moins un de chaque racine correspondante, et comme chaque terme ainsi formé et le quarré précédent, étant additionnés, composent le quarré de la racine correspondante, si nous voulons connaître la quatrième puissance de 121, nous ajoutons à 14400, le quarré précédent, 241, le terme de la série, qui est précisément le double moins un de la racine 121, dont nous cherchons la quatrième puissance, afin d'avoir 14641, le quarré de 121, lequel indique le nombre des termes à calculer pour la trouver ; 2°. nous prenons 29282, le double du quarré 14641, la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, que nous multiplions par 7320$\frac{1}{2}$, la moitié du quarré 14641 et la moitié

de leur nombre, pour avoir 21435888 1, la quatrième puissance de 121.

Si nous voulons connaître la quatrième puissance de 122, nous ajoutons à 14641, le quarré précédent, 243, le double moins un de la racine 122, dont nous cherchons la quatrième puissance, pour avoir 14884, le quarré de 122, lequel indique le nombre des termes à calculer; 2°. nous prenons 29768, le double du quarré 14884, la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, que nous multiplions par 7442, la moitié du quarré 14884 et la moitié de leur nombre, pour avoir 221533456, la quatrième puissance de 122.

Pour passer des dixaines de la racine dont nous avons trouvé la manière de former les quatrièmes puissances, aux centaines dont nous allons montrer celle d'obtenir leurs quatrièmes puissances, 1°. nous mettons un zéro à la suite de 122, la racine, et deux zéros à la suite de 14884, son quarré, en sorte que 1220 est la racine de 1488400, quarré indicatif du nombre des termes à calculer pour trouver la quatrième puissance de 1220; 2°. nous prenons 2976800, le double du quarré précité, égalant la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, lequel double nous multiplions par 744200, la moitié du quarré 1488400 et la moitié de leur nombre, pour avoir 221533456 0000, la quatrième puissance de 1220.

Si nous ne voulons pas chercher successivement les quatrièmes puissances des racines 1221, 1222, 1223, mais obtenir aussitôt celle de 1224, voilà comment il faut opérer. Nous savons que chaque terme égale le double, moins un, de la racine correspondante, que les termes suivans, pris successivement, croissent de deux en deux unités, quand les racines correspondantes croissent d'unité en unité. D'après ces données, il sera facile de trouver le quarré de 1224, puisqu'il suffit d'additionner 1488400, quarré de 1220, et 9776, la somme de 2440, 2443, 2445, 2447, quatre termes qui correspondent aux racines 1221, 1222, 1223 et 1224, pour avoir

1498176, quarré de 1224. Ensuite, nous prenons 2996352, le double du quarré précité, qui égale la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, pour trouver la quatrième puissance de 1224, lequel double, nous multiplions par 749088, la moitié du quarré 1498176 et la moitié de leur nombre, pour avoir 2244531326976, la quatrième puissance de 1224.

Dans la transition des centaines de la racine aux mille, des mille aux dix mille, etc., on doit opérer de la même manière.

Tout ce que nous venons de dire prouve que cette méthode est aussi facile et expéditive que sûre, pour trouver les quatrièmes puissances des racines.

CHAPITRE DEUXIÈME.

EXTRACTION DE LA RACINE QUATRIÈME, FAITE SELON CETTE NOUVELLE MÉTHODE.

Connaissant la nouvelle méthode de trouver les quatrièmes puissances des nombres naturels 1, 2, 3, 4, etc., nous allons opérer et essayer d'obtenir, d'après les principes qui y sont enseignés, la racine quatrième d'un nombre quelconque. Mais, pour parvenir à en extraire la racine, il est utile de savoir que tout nombre exprimé par quatre chiffres qui ont la plus grande valeur numérique, comme 9999, a pour racine de la quatrième puissance le seul chiffre 9; que tout nombre exprimé par cinq chiffres qui ont la plus petite valeur numérique, comme 10000, a pour racine de la quatrième puissance les deux chiffres 10; que tout nombre, d'après cette remarque certaine, dont on cherche la racine quatrième, doit être partagé, en allant de droite à gauche, par tranches de quatre chiffres en quatre chiffres; en sorte que chaque tranche a nécessairement quatre chiffres, excepté la tranche le plus à gauche qui peut n'en avoir que trois, ou deux, ou un seul; que nous nommons la tranche le plus à gauche, sur laquelle nous opérons d'abord, première tranche, les suivantes, seconde, troisième, etc., tranches; qu'on doit commencer l'extraction de la racine quatrième sur la tranche le plus à gauche, la continuer en suivant les tranches qui vont de gauche à droite et qui se succèdent immédiatement; que la racine doit avoir autant de chiffres que le nombre dont on cherche la quatrième puissance a de tranches; que connais-

sant la quatrième puissance d'un nombre, nous connaissons simultanément sa racine.

EXEMPLE 1^er^.

133, 6336.

Ayant partagé le nombre 1336336 en deux tranches, nous devons avoir à la racine deux chiffres, qui exprimeront des dixaines et des unités.

D'abord 3 est la racine de 81, la quatrième puissance la plus proche de 133, la première tranche, puisque 256, celle de 4, la dépasse.

Maintenant, nous allons opérer sur 1336336, le nombre entier. Pour faire cette opération, 1°. nous mettons un zéro à la suite de 3, la racine, et quatre zéros à la suite de 81, sa quatrième puissance, en sorte que 30 est la racine quatrième de 810000; 2°. comme cette quatrième puissance n'est pas la plus approximative du nombre entier, alors nous cherchons celle de 31, que nous élevons à son quarré 961, lequel exprime qu'il faut calculer 961 termes de la progression génératrice des quarrés, afin d'avoir la quatrième puissance de 31; 3°. nous multiplions 1922, le double du quarré 961, lequel égale la somme de 1, premier terme, et de 1921, dernier terme de ceux qui sont à calculer, par $480\frac{1}{2}$, la moitié du quarré 961 et la moitié de leur nombre, pour avoir 923521, la quatrième puissance de 31. Puis nous cherchons de suite la quatrième puissance de 34. Pour la trouver, nous savons que chaque terme de la série primitive égale le double moins un de chaque racine correspondante; que les termes suivans, pris successivement, croissent de deux en deux unités, quand les racines croissent d'unité en unité. Ainsi, les trois racines 32, 33 et 34 correspondent aux trois termes 63, 65 et 67, qui font la somme de 195, laquelle, additionnée avec 961, quarré de 31, produit 1156, quarré de 34. Enfin, nous prenons 2312, le double du quarré 1156, qui égale la somme des

premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, pour trouver la quatrième puissance de 34, lequel double nous multiplions par 578, la moitié du quarré 1156 et la moitié de leur nombre, pour avoir 1336336, la quatrième puissance de 34.

EXEMPLE II.

9999, 0382, 7649.

Ayant partagé le nombre 99990382 7649 en trois tranches, nous devons avoir à la racine trois chiffres, qui exprimeront des centaines, des dixaines et des unités.

D'abord, nous commençons par 9999, la tranche le plus à gauche. Le chiffre qui en est extrait, et doit être placé à la racine, est 9, qui exprime neuf centaines; 6561, la quatrième puissance de 9, est la plus approchante de 9999, la première tranche, puisque 10000, celle de 10, la dépasse.

En second lieu, nous allons opérer sur 99990382, les deux premières tranches. 1°. Pour faire cette seconde opération, nous ajoutons un zéro à 9, la racine, et quatre zéros à 6561, sa quatrième puissance, en sorte que 90 est la racine quatrième de 65610000; 2°. comme cette quatrième puissance est encore bien éloignée de celle qui approche le plus près possible de 99990382, les deux premières tranches du nombre que nous voulons extraire, comme chaque opération produit la quatrième puissance d'une racine quelconque, comme nous présumons que la quatrième puissance de la racine 99 approche le plus près possible des deux premières tranches; alors, afin d'abréger notre calcul, nous cherchons la quatrième puissance de la racine 99, que nous élevons à son quarré 9801, lequel exprime qu'il faut calculer 9801 termes de la progression génératrice des quarrés, afin d'avoir la quatrième puissance de 99; 3°. nous multiplions 19602, le double du quarré 9801, qui égale la somme de 1, premier terme, et de 19601, dernier terme de ceux qui sont à calculer, par 4900 $\frac{1}{2}$, la moitié du quarré 9801 et la moitié de

ır nombre, pour avoir 96059601, la quatrième puissance 99, la plus approchante de 99990382, les deux premières anches, puisque 100000000, la quatrième puissance de 0, les dépasse.

En troisième lieu, nous allons opérer sur 99990827649, nombre entier. 1°. Pour faire cette troisième opération, ous ajoutons un zéro à 99, la racine, et quatre zéros à 059601, sa quatrième puissance, en sorte que 990 est la icine quatrième de 960596010000; 2°. comme cette quaième puissance est encore bien éloignée de celle qui approche le plus près le nombre entier, et comme nous présumons que la quatrième puissance de 999 en est la plus pproximative, aussi nous élevons la racine 999 à son quarré 98001, lequel exprime qu'il faut calculer 998001 termes e la progression génératrice, afin d'avoir la quatrième puisance de 999; 3°. nous multiplions 1996002, le double du uarré 998001, lequel double égale la somme de 1, premier erme, et de 1996001, dernier terme de ceux qui sont à calculer, par 499000 $\frac{1}{2}$, la moitié du quarré 998001 et la moitié le leur nombre, pour avoir 996005996001, la quatrième uissance de 999, la plus approchante du nombre entier 99990827649, puisque 1000000000000, la quatrième puisance de 1000, la dépasse; donc 999, qui est la racine quarième de 996005996001, l'est aussi de 99990827649.

EXEMPLE III.

789, 6453, 1902, 9659.

Ayant partagé le nombre 789645319029659 en quatre tranches, nous devons avoir à la racine quatre chiffres, qui exprimeront des mille, des centaines, des dixaines et des unités.

Premièrement, nous commençons à extraire la racine quatrième de 789, la tranche le plus à gauche, et nous avons 5, qui exprime 5000 et est la racine de 625, la quatrième puissance la plus approchante de 789.

Secondement, pour opérer sur 7896453, les deux premières tranches, 1°. nous ajoutons un zéro à 5, la racine, et quatre zéros à 625, sa quatrième puissance, en sorte que 50 est la racine quatrième de 6250000; 2°. nous cherchons la quatrième puissance de 53, que nous présumons être la plus grande des deux premières tranches; 3°. nous élevons 53 à son quarré 2809, qui exprime qu'il faut calculer 2809 termes de la progression génératrice des quarrés, afin d'avoir la quatrième puissance de 53; 4°. nous multiplions 5618, le double du quarré 2809, lequel double égale la somme de 1, premier terme, et de 5617, dernier terme de ceux qui sont à calculer, par $1404\frac{1}{2}$, la moitié du quarré 2809 et la moitié de leur nombre, pour avoir 7890481, la quatrième puissance de 53, la plus approchante de 7896453, les deux premières tranches, puisque 8503056, la quatrième puissance de 54, que nous avons obtenue de la même manière, les dépasse.

Troisièmement, nous cherchons la racine de la quatrième puissance la plus approchante de 7896453 1902, les trois premières tranches. Pour la trouver, 1°. nous ajoutons un zéro à 53, la racine, et quatre zéros à 7890481, sa quatrième puissance, en sorte que 530 est la racine quatrième de 789048 10000; 2°. nous cherchons la quatrième puissance de 531, que nous élevons à son quarré 281961, qui exprime qu'il faut calculer 281961 termes de la progression génératrice des quarrés, afin d'avoir la quatrième puissance de 531; 3°. nous multiplions 563922, le double du quarré 281961, lequel double égale la somme de 1, premier terme, et de 563921, dernier terme de ceux qui sont à calculer, par $140980\frac{1}{2}$, la moitié du quarré 281961 et la moitié de leur nombre, pour avoir 79502005521, la quatrième puissance de 531, laquelle excède 7896453 1902, les trois premières tranches. Donc 530, la racine quatrième de 789048 10000, est la plus approximative des trois premières tranches.

[...]natrièmement, pour trouver la racine quatrième du [...]mbre entier 78964531902966 9, 1°. nous ajoutons un zéro [...]30, la racine, et quatre zéros à 7890481 0000, sa quatrième [...]ssance, en sorte que 5300 est la racine quatrième de [...]90481 00000000 ; 2°. nous cherchons la quatrième puissance de 5301, que nous élevons à son quarré 28100601, qui [...]rime qu'il faut calculer 28100601 termes de la progres[...]n génératrice des quarrés, afin d'avoir la quatrième puis[...]ce de 5301 ; 3°. nous multiplions 56201202, le double du [...]arré 28100601, lequel double égale la somme de 1, pre[...]er terme, et de 56201201, le dernier terme de ceux qui [...]t à calculer, par 14050300 ½, la moitié du quarré [...]100601 et la moitié de leur nombre, pour avoir...... [...]9643776561201, la quatrième puissance de 5301, la plus prochante du nombre entier 78964531902965 9, puisque [...]023987 03296 16, la quatrième puissance de 5302, dépasse [...] nombre entier.

TABLEAU EXPLICATIF

Des quatrièmes puissances, fait selon la nouvelle méthode.

La progression génératrice des quarrés 1, 3, 5, etc., etc., forme les [...]atrièmes puissances, suivant les règles qui leur sont appropriées.

Racines.	Chaque quarré indique chaque nombre des termes de la progression génératrice desquarrés à calculer pour former chaque 4e puissance.	Chaque quarré doublé égale la somme du premier terme, qui est toujours 1, et du dernier terme de ceux qui sont à calculer pour former chaque 4e puissance.	Chaque quarré doublé, multiplié par la moitié de chacun de ces mêmes quarrés, produit la 4e puissance de chaque racine correspondante.
Racines.	Quarrés.	Quarrés doublés.	4es puissances.
1	1	2	1
2	4	8	16
3	9	18	81

Racines.	Quarrés.	Quarrés doublés.	4es puissances.
4	16	32	256
5	25	50	625
6	36	72	1296
7	49	98	2401
8	64	128	4096
9	81	162	6561
10	100	200	10000
11	121	242	14641
12	144	288	20736
13	169	338	28561
14	196	392	38416
15	225	450	50625
16	256	512	65536
17	289	578	83521
18	324	648	104976
19	361	722	130321
20	400	800	160000
21	441	882	194481
22	484	968	234256
23	529	1058	279841
24	576	1152	331776
25	625	1250	390625
26	676	1352	456976
27	729	1458	531441
28	784	1568	614656
29	841	1682	707281
30	900	1800	810000
31	961	1922	923521
32	1024	2048	1048576
33	1089	2178	1185921
34	1156	2312	1336336
35	1225	2450	1500625
36	1296	2592	1679616
37	1369	2738	1874161
38	1444	2888	2085136
39	1521	3042	2313441

ines.	Quarrés.	Quarrés doublés.	4es puissances.
40	1600	3200	2560000
41	1681	3362	2825761
42	1764	3528	3111696
43	1849	3698	3418801
44	1936	3872	3748096
45	2025	4050	4100625
46	2116	4232	4477456
47	2209	4418	4879681
48	2304	4608	5308416
49	2401	4802	5764801
50	2500	5000	6250000
51	2601	5202	6765201
52	2704	5408	7311616
53	2809	5618	7890481
54	2916	5832	8503056
55	3025	6050	9150625
56	3136	6272	9834496
57	3249	6498	10556001
58	3364	6728	11316496
59	3481	6962	12117361
60	3600	7200	12960000
61	3721	7442	13845841
62	3844	7688	14776336
63	3969	7938	15752961
64	4096	8192	16777216
65	4225	8450	17850625
66	4356	8712	18974736
67	4489	8978	20151121
68	4624	9248	21381376
69	4761	9522	22667121
70	4900	9800	24010000
71	5041	10082	25411681
72	5184	10368	26873856
73	5329	10658	28398241
74	5476	10952	29986576
75	5625	11250	31640625

Racines.	Quarrés.	Quarrés doublés.	4es puissances.
76	5776	11552	33362176
77	5929	11858	35153041
78	6084	12168	37015056
79	6241	12482	38950081
80	6400	12800	40960000
81	6561	13122	43046721
82	6724	13448	45212176
83	6889	13778	47458321
84	7056	14112	49787136
85	7225	14450	52200625
86	7396	14792	54700816
87	7569	15138	57289761
88	7744	15488	59969536
89	7921	15842	62742241
90	8100	16200	65610000
91	8281	16562	68574961
92	8464	16928	71639296
93	8649	17298	74805201
94	8836	17672	78074896
95	9025	18050	81450625
96	9216	18432	84934656
97	9409	18818	88529281
98	9604	19208	92236816
99	9801	19602	96059601
100	10000	20000	100000000

Si les quarrés sont formés successivement par les term de la progression génératrice 1, 3, 5, 7, etc., etc., do 2 est la différence constante, alors les quarrés doublés sont successivement par les termes doublés de la mêm série 2, 6, 10, 14, etc., etc., dont 4 est la différen constante.

FORMATION

DE LA CINQUIÈME PUISSANCE

ET EXTRACTION DE SA RACINE.

CHAPITRE PREMIER.

FORMATION DE LA CINQUIÈME PUISSANCE.

La formation des cinquièmes puissances des nombres ésulte de la progression génératrice des quarrés 1, 3, 5, , 9, 11, etc., etc., et peut être calculée de deux manières.

La première consiste à savoir que les termes de cette érie, calculés jusqu'à l'infini, produisent jusqu'à l'infini es quarrés qui contiennent toutes les puissances des degrés pairs, et, par conséquent, la quatrième puissance l'une racine quelconque, que l'on obtient facilement en uivant les règles que nous avons enseignées à ce sujet, aquelle quatrième puissance étant multipliée par la même acine, ou étant répétée autant de fois que la même racine a d'unités, produit la cinquième puissance de cette même racine.

La seconde résulte aussi de la progression génératrice es quarrés, dont le nombre des termes est indiqué par le quarré correspondant, et dont chaque terme de ce nombre étant multiplié par la racine, ou répété autant de fois que la racine a d'unités, produit une suite de termes qui conservent entre eux la même différence, sont toujours en progression arithmétique, par conséquent, calcu-

lables d'après les principes ci-après établis, et forment ainsi la cinquième puissance des nombres 1, 2, 3, 4, etc. Cette suite de termes, nouvellement et progressivement reproduits, se calcule, à chaque opération, en additionnant les premier et dernier termes de chaque nombre, et en multipliant chaque somme qui provient de l'addition, et qui égale le double du cube correspondant de la racine, par la moitié du quarré de la même racine, pour avoir la cinquième puissance de cette racine.

Les exemples suivans feront facilement comprendre cette seconde manière d'opérer.

Pour trouver la cinquième puissance de 2, 1°. 4, le quarré de 2, indique qu'il faut prendre les 4 termes suivans 1, 3, 5, 7; 2°. chacun de ces 4 termes doit être multiplié par la racine 2, pour avoir 2, 6, 10, 14; 3°. la sommation de ces 4 termes ainsi augmentés, dont la différence constante est 4, se fait en additionnant 2 et 14, les premier et dernier termes, et en multipliant la somme 16, qui égale le double de 8, cube de 2, par 2, la moitié du quarré de 4, pour avoir 32, la cinquième puissance de 2.

Pour trouver la cinquième puissance de 3, 1°. 9, le quarré de 3, indique qu'il faut prendre les 9 termes suivans, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17; 2°. chacun de ces 9 termes doit être multiplié par la racine 3, pour avoir 3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51; 3°. la sommation de ces 9 termes ainsi augmentés, dont la différence constante est 6, se fait en additionnant 3 et 51, les premier et dernier termes, et en multipliant la somme 54, qui égale le double de 27, cube de 3, par $4\frac{1}{2}$, la moitié du quarré 9, pour avoir 243, la cinquième puissance de 3.

Pour trouver la cinquième puissance de 4, 1°. 16, le quarré de 4, indique qu'il faut prendre les 16 termes suivans, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25,

27, 29, 31 ; 2°. chacun de ces seize termes doit être multiplié par la racine 4, pour avoir 4, 12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68, 76, 84, 92, 100, 108, 116, 124 ; 3°. la sommation de ces seize termes ainsi augmentés, dont la différence constante est 8, se fait en additionnant 4 et 124, les premier et dernier termes, et en multipliant la somme 128, qui égale le double de 64, cube de 4, par 8, la moitié du quarré 16, pour avoir 1024, la cinquième puissance de 4.

Cette méthode peut être abrégée, puisque nous obtenons la cinquième puissance d'une racine quelconque en multipliant le double du cube de cette même racine, lequel double égale la somme des premier et dernier termes du nombre de ceux qui sont à calculer, et dont chacun a été pris autant de fois que la racine a d'unités, par la moitié du quarré correspondant et indicateur du nombre des termes de la progression ainsi augmentés.

Nous obtenons la cinquième puissance de 5 en multipliant 250, le double de 125, cube de 5, lequel double égale la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, et dont chacun a été pris autant de fois que la racine a d'unités, par 12 $\frac{1}{2}$, la moitié de 25, quarré de 5, lequel indique le nombre des termes, ainsi augmentés, à calculer, pour avoir 3125, la cinquième puissance de 5.

Nous obtenons la cinquième puissance de 6 en multipliant 432, le double de 216, cube de 6, lequel double égale la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, et dont chacun a été pris autant de fois que la racine a d'unités, par 18, la moitié de 36, quarré de 6, lequel indique le nombre des termes, ainsi augmentés, à calculer, pour avoir 7776, la cinquième puissance de 6.

Dans la transition des unités de la racine à ses dixaines, 1°. nous mettons un zéro à la dernière racine 6, pour

avoir celle de 60, deux zéros à 36, quarré de 6, pour avoir 3600, quarré de 60, et trois zéros à 216, cube de 6, pour avoir 216000, cube de 60; 2°. nous multiplions 432000, le double de 216000, cube de 60, lequel double égale la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, et dont chacun a été pris autant de fois que la racine 60 a d'unités, par 1800, la moitié de 3600, quarré de 60, lequel indique le nombre des termes, ainsi augmentés, à calculer, pour avoir 777600000, la cinquième puissance de 60.

Si nous voulons obtenir la cinquième puissance de 61, nous avons 3721, quarré de 61, dont la moitié est 1860 $\frac{1}{2}$; 226981, cube de 61, lequel doublé fait 453962; nous multiplions 453962, le double de 226981, cube de 61, lequel double égale la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, et dont chacun a été pris autant de fois que la racine a d'unités, par 1860 $\frac{1}{2}$, la moitié de 3721, quarré de 61, afin d'avoir 8445963o1, la cinquième puissance de 61.

Tout ce que nous avons dit dans la transition des unités aux dixaines est applicable à chacune de celles des dixaines aux centaines, des centaines aux mille, etc.

D'après tous ces exemples, nous allons essayer d'extraire la racine cinquième d'un nombre quelconque.

CHAPITRE DEUXIÈME.

EXTRACTION DE LA RACINE CINQUIÈME.

Dès que nous connaissons la méthode claire et précise de former la cinquième puissance d'un nombre donné, il nous sera facile d'extraire la racine d'une quantité numérique, puisque, connaissant la formation de la cinquième puissance de cette même quantité, on connaît simultanément sa racine.

Mais, avant de commencer cette extraction, il est indispensable de savoir, 1°. que tout nombre exprimé par cinq chiffres qui ont la plus grande valeur numérique, comme 99999, a pour racine de la cinquième puissance le seul chiffre 9; que tout nombre exprimé par six chiffres qui ont la plus petite valeur numérique, comme 100000, a pour racine de la cinquième puissance les deux chiffres 10; 2°. que tout nombre dont on cherche la racine cinquième, d'après cette observation, doit être partagé, en allant de droite à gauche, par tranches de cinq chiffres en cinq chiffres, en sorte que chaque tranche doit avoir nécessairement cinq chiffres, excepté la tranche le plus à gauche, qui peut n'en avoir que quatre, ou trois, ou deux, ou même un seul chiffre; 3°. que la racine doit avoir autant de chiffres que le nombre dont on cherche la racine cinquième a de tranches; 4°. qu'on doit commencer l'opération par la tranche le plus à gauche, la continuer sur les deux premières tranches, ensuite sur les trois premières tranches, etc., enfin, sur le nombre entier.

Quoique nous connaissions deux manières de former les

cinquièmes puissances, cependant nous nous servirons, pour l'extraction de la racine cinquième d'un nombre donné, de la seconde manière. Cette dernière consiste à multiplier le double du cube de la racine correspondante, lequel double égale la somme du premier terme, qui est toujours 1, et du dernier terme de ceux qui doivent être calculés, et dont chacun a été multiplié par la même racine, par la moitié du quarré correspondant qui indique leur nombre, pour avoir la cinquième puissance cherchée, et par cela même connaître simultanément sa racine.

EXEMPLE UNIQUE.

2059, 62976.

Nous partageons le nombre 20596297 6 en deux tranches. Ce partage nous montre que nous aurons à la racine deux chiffres, qui exprimeront des dixaines et des unités.

Puis nous extrayons la racine cinquième de 2059, la première tranche, et nous avons 4, la racine de 1024, la cinquième puissance la plus approchante de 2059, la première tranche, puisque 3125, la cinquième puissance de 5, l'excède.

Enfin, nous cherchons celle du nombre entier 20596297 6. Pour la trouver, 1°. nous mettons à la suite de la racine 4 un zéro, et à la suite de sa cinquième puissance 1024 cinq zéros, en sorte que 40 est la racine cinquième de 102400000; 2°. nous obtenons la cinquième puissance de 41 en prenant successivement 1681, le quarré de 41, lequel indique le nombre des termes de la série primitive à calculer, et dont la moitié est 840 $\frac{1}{2}$, et 68921, le cube de 41, dont le double est 137842, qui égale la somme des premier et dernier termes de ceux qui doivent être calculés, pour avoir la cinquième puissance de 41; 3°. nous multiplions 137842, la somme des premier et dernier ter-

mes de ceux qui doivent être calculés, par 840 $\frac{1}{2}$, pour avoir 115856201, la cinquième puissance de 41. Si nous voulons savoir combien d'unités nous devons ajouter à 41, pour connaître la racine la plus approchante de..... 20596976, le nombre entier, alors nous faisons la règle de trois suivante, que nous appliquons sur la puissance la plus petite, dont nous nous servons pour opérer, à l'effet de nous rapprocher le plus près possible de l'exactitude du calcul. 1681, le quarré de 41, est à 1600, le quarré de 40, comme 2116, le quarré de 46, est à 1681, le quarré de 41. La première différence 81 est contenue cinq fois dans la seconde différence 435. Ainsi, la racine 41 étant augmentée de 5 unités, nous chercherons la cinquième puissance de 46. Pour la trouver, 1°. nous prenons 2116, le quarré de 46, lequel indique le nombre des termes à calculer, dont chaque terme a été multiplié par la racine 46; et dont la moitié de ce quarré est 1058; nous prenons aussi 194672, le double de 97336, le cube de 46, lequel double égale la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, pour obtenir sa cinquième puissance; 2°. nous multiplions 194672, la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont ainsi augmentés, que nous devons calculer, par 1058, la moitié de leur nombre, pour avoir le nombre entier 20596976, lequel est effectivement la cinquième puissance de 46.

TABLEAU

De la cinquième puissance.

La progression génératrice des quarrés 1, 3, 5, 7, etc., etc., forme les cinquièmes puissances.

Racines.	Chaque quarré indique chaque nombre des termes, dont chacun est multiplié par chaque racine correspondante.	La moitié de chaque quarré est le multiplicateur servant à trouver chaque 5e puissance.	Cubes.	Chaque cube doublé est le multiplicande qui égale chaque somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, et dont chacun a été multiplié par la racine correspondante.	Chaque cube doublé, multiplié par la moitié du quarré correspondant, produit la 5e puissance de la racine correspondante.
Racin.	Quarrés.	Quarrés $\frac{1}{2}$	Cubes.	Cub. doublés.	5es puissanc.
1	1	$\frac{1}{2}$	1	2	1
2	4	2	8	16	32
3	9	4 $\frac{1}{2}$	27	54	243
4	16	8	64	128	1024
5	25	12 $\frac{1}{2}$	125	250	3125
6	36	18	216	432	7776
7	49	24 $\frac{1}{2}$	343	686	16807
8	64	32	512	1024	32768
9	81	40 $\frac{1}{2}$	729	1458	59049
10	100	50	1000	2000	100000
11	121	60 $\frac{1}{2}$	1331	2662	161051
12	144	72	1728	3456	248832
13	169	84 $\frac{1}{2}$	2197	4394	371293
14	196	98	2744	5488	537824
15	225	112 $\frac{1}{2}$	3375	6750	759375
16	256	128	4096	8192	1048576
17	289	144 $\frac{1}{2}$	4913	9826	1419857
18	324	162	5832	11664	1889568
19	361	180 $\frac{1}{2}$	6859	13718	2476099
20	400	200	8000	16000	3200000

Racin.	Quarrés.	Quarrés $\frac{1}{2}$.	Cubes.	Cubes doublés.	5es puissanc.
21	441	220 $\frac{1}{2}$	9261	18522	4084101
22	484	242	10648	21296	5153632
23	529	264 $\frac{1}{2}$	12167	24334	6436343
24	576	288	13824	27648	7962624
25	625	312 $\frac{1}{2}$	15625	31250	9765625
26	676	338	17576	35152	11881376
27	729	364 $\frac{1}{2}$	19683	39366	14348907
28	784	392	21952	43904	17210368
29	841	420 $\frac{1}{2}$	24389	48778	20511149
30	900	450	27000	54000	24300000
31	961	480 $\frac{1}{2}$	29791	59582	28629151
32	1024	512	32768	65536	33554432
33	1089	544 $\frac{1}{2}$	35937	71874	39135393
34	1156	578	39304	78608	45435424
35	1225	612 $\frac{1}{2}$	42875	85750	52521875
36	1296	648	46656	93312	60466176
37	1369	684 $\frac{1}{2}$	50653	101306	69343957
38	1444	722	54872	109744	79235168
39	1521	760 $\frac{1}{2}$	59319	118638	90224199
40	1600	800	64000	128000	102400000

FORMATION

DE LA SIXIÈME PUISSANCE

ET EXTRACTION DE SA RACINE.

CHAPITRE PREMIER.

FORMATION DE LA SIXIÈME PUISSANCE.

Avant d'extraire la racine sixième d'un nombre quelconque, nous allons montrer la manière de former les sixièmes puissances des nombres, résultante de la progression génératrice des quarrés 1, 3, 5, 7, 9, etc., etc.

Leur formation dépend principalement de la connaissance du nombre des termes de cette série qu'il faut calculer. Or, le cube de chaque racine exprime chaque nombre des termes qu'on doit sommer pour trouver la sixième puissance de chacune d'elles.

Mais, pour faire connaître la manière de sommer chaque nombre exprimé par le cube correspondant, et pour rendre plus intelligible la méthode de former les sixièmes puissances des nombres 1, 2, 3, 4, etc., etc., en calculant les termes de la progression génératrice des quarrés 1, 3, 5, 7, etc., etc., nous avons fait un tableau qui a cinq colonnes. La première contient les racines; la seconde contient chaque cube des racines, lequel indique chaque nombre des termes de la progression génératrice des quarrés qu'on doit calculer pour former chaque sixième puissance; la troisième contient la moitié de chaque cube, laquelle est

e multiplicateur qui sert à trouver chaque sixième puis-
ance ; la quatrième contient la somme du premier terme,
ui est toujours 1, et du dernier terme de chaque nombre
le ceux qui sont à calculer, laquelle somme égale le cube
loublé ; la cinquième contient chaque somme des premier
t dernier termes de ceux qui sont à calculer, laquelle
tant toujours le double de chaque cube correspondant, et
tant multipliée par la moitié de chacun de ces mêmes
ubes, indicative de la moitié de leur nombre, produit
haque sixième puissance.

Les exemples suivans, faits conformément aux principes
noncés dans ce tableau, suffiront pour prouver la soli-
lité de ce calcul.

Afin de former la sixième puissance de 2, 8, le cube
le 2, indique qu'il faut additionner les 8 premiers termes
, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, pour avoir 64, la sixième
uissance de 2.

Afin de former la sixième puissance de 3, 27, le cube de
, indique qu'il faut additionner les 27 premiers termes 1,
, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31,
3, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, pour avoir 729,
a sixième puissance de 3.

Nous remplaçons l'addition, qui deviendrait longue et pé-
ible, par la multiplication, afin de sommer plus prompte-
ent les nombreux termes de la progression, qui sont abso-
ument nécessaires pour former chaque sixième puissance.
Ainsi, cette sommation se fait, 1°. en prenant le double
le chaque cube de la racine, lequel double égale la somme
les premier et dernier termes du nombre de ceux qui sont à
calculer ; 2°. en multipliant le double de chaque cube par la
moitié du cube, qui exprime la moitié de leur nombre, pour
avoir un produit qui est vraiment la sixième puissance de la
racine.

Afin de former la sixième puissance de 4, nous savons
que 64, le cube de 4, indique qu'il faut sommer 64 termes

de la progression génératrice des quarrés; que cette sommation se fait en multipliant 128, le double du cube 64, qui égale la somme des premier et dernier termes des 64 qui sont à calculer, par 32, la moitié du même cube, laquelle est aussi la moitié de leur nombre, pour avoir 4096, la sixième puissance de 4.

Afin de former la sixième puissance de 5, nous savons que 125, le cube de 5, indique qu'il faut sommer 125 termes de la progression génératrice des quarrés; que cette sommation se fait en multipliant 250, le double du cube, qui égale la somme des premier et dernier termes des 125 qui sont à calculer, par 62 $\frac{1}{2}$, la moitié du même cube, laquelle est aussi la moitié de leur nombre, pour avoir 15625, la sixième puissance de 5.

Afin de former la sixième puissance de 6, nous savons que 216, le cube de 6, indique qu'il faut sommer 216 termes de la progression génératrice des quarrés; que cette sommation se fait en multipliant 432, le double du cube 216, qui égale la somme des premier et dernier termes des 216 qui sont à calculer, par 108, la moitié du même cube, laquelle est celle de leur nombre, pour avoir 46656, la sixième puissance de 6.

Afin de former la sixième puissance de 7, nous savons que 343, le cube de 7, indique qu'il faut sommer 343 termes de la progression génératrice des quarrés; que cette sommation se fait en multipliant 686, le double du cube 343, qui égale la somme des premier et dernier termes des 343 qui sont à calculer, par 171 $\frac{1}{2}$, la moitié du même cube, laquelle est celle de leur nombre, pour avoir 117649, la sixième puissance de 7.

Dans la transition des unités de la racine à ses dixaines, 1°. nous mettons un zéro à la suite de la dernière racine 7, pour avoir celle de 70, et trois zéros à la suite de 343, cube de 7, pour avoir 343000, cube de 70; 2°. nous multiplions 686000, le double du cube de 343000, qui égale la somme

des premier et dernier termes des 343000, qui sont à calculer, par 171500, la moitié du même cube, laquelle est celle de leur nombre, pour avoir 117649000000, la sixième puissance de 70.

Afin de former la sixième puissance de 71, nous savons que 357911, cube de 71, indique qu'il faut sommer 357911 termes de la progression génératrice des quarrés; que cette sommation se fait en multipliant 715822, le double du cube 357911, qui égale la somme des premier et dernier termes des 357911 qui sont à calculer, par 178955 ½, la moitié du même cube, laquelle est celle de leur nombre, pour avoir 128100283921, la sixième puissance de 71.

Tout ce que nous avons dit dans la transition des unités aux dixaines est applicable à chacune de celles des dixaines aux centaines, des centaines aux mille, etc.

Suivant tous ces exemples, nous allons chercher à extraire la racine sixième d'un nombre.

CHAPITRE DEUXIÈME.

EXTRACTION DE LA RACINE SIXIÈME.

Dès que nous connaissons la manière de former la sixième puissance des nombres naturels, il nous sera facile d'extraire la racine sixième d'un nombre quelconque en suivant les mêmes principes; mais avant de commencer cette extraction, il est utile de savoir, 1°. que tout nombre exprimé par six chiffres qui ont la plus grande valeur numérique, comme 999999, a pour racine de la sixième puissance le seul chiffre 9; que tout nombre exprimé par sept chiffres qui ont la plus petite valeur numérique, comme 1000000, a pour racine de la sixième puissance les deux chiffres 10; 2°. que tout nombre dont on cherche la racine sixième, d'après cette remarque, doit être partagé, en allant de droite à gauche, par tranches de six chiffres en six chiffres, en sorte que chaque tranche doit avoir nécessairement six chiffres, excepté la tranche le plus à gauche, qui peut n'en avoir que cinq, ou quatre, ou trois, ou deux, ou un seul chiffre; 3°. que la racine doit avoir autant de chiffres que le nombre qu'on veut extraire a de tranches; 4°. que l'extraction de la racine commence par la tranche le plus à gauche, continue sur les deux premières tranches, etc., etc., et enfin sur le nombre entier.

EXEMPLE UNIQUE.

284, 124134, 038846, 836736.

Ayant partagé le nombre 284124134038846836736 en quatre tranches, nous devons avoir à la racine quatre chiffres, qui exprimeront des mille, des centaines, des dixaines et des unités.

Premièrement, nous commençons à extraire la racine de 284, la tranche le plus à gauche; le chiffre 2, qui en est extrait, exprime 2 mille, et est la racine de 64, la sixième puissance la plus grande de 284, puisque 729, la sixième puissance de 3, la dépasse.

Secondement, pour opérer sur 284124134, les deux premières tranches, 1°. nous mettons un zéro à la suite de 2, la racine, et six zéros à la suite de 64, sa sixième puissance, en sorte que 20 est la racine sixième de 64000000; 2°. comme cette sixième puissance nous paraît éloignée des deux premières tranches, alors nous remplaçons le zéro de la racine par un 5, et nous cherchons la sixième puissance de 25, en élevant 25 à son cube 15625, qui montre que nous devons sommer 15625 termes de la progression génératrice des quarrés pour former la sixième puissance de 25; en prenant 31250, le double du cube 15625, lequel double exprime la somme des premier et dernier termes des 15625 qui sont à calculer; en multipliant 31250, la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 7812 $\frac{1}{2}$, la moitié du cube 15625, laquelle est aussi la moitié de leur nombre, pour avoir 244140625, la sixième puissance de 25, la plus approximative de 284124134, les deux premières tranches, puisque 308915776, la sixième puissance de 26, les dépasse.

Troisièmement, pour opérer sur 284124134038816, les trois premières tranches, 1°. nous mettons un zéro à la suite de 25, la racine, et six zéros à la suite de 244140625, sa sixième puissance, en sorte que 250 est la racine sixième de 244140625000000; 2°. comme cette sixième puissance est assez éloignée des trois premières tranches, alors nous cherchons la sixième puissance de 256, que nous présumons en approcher le plus près possible, en élevant 256 à son cube 16777216, qui montre que nous devons sommer 16777216 termes de la progression génératrice des quarrés pour former la sixième puissance de 256; en prenant 33554432, le double du cube.... 16777216, lequel double exprime la somme des premier et

CHAPITRE DE[illegible]

EXTRACTION DE LA[illegible]

Dès que nous connaissons[illegible] puissance des nombres p[illegible] la racine sixième d'u[illegible] mêmes principes; m[illegible] tion, il est utile d[illegible] par six chiffres [illegible] comme 999999 [illegible] chiffre 9; qu[illegible] la plus peti[illegible] cine de la [illegible] nombre [illegible] marq[illegible] trar[illegible] tr[illegible] pliant 3371964288, la somme des premier et dernier termes de deux qui sont à calculer, par 842799072, la moitié du cube 1685982144, laquelle est effectivement la moitié des termes à calculer, pour avoir[illegible] 2812413403884683673[illegible], le nombre entier, dont la racine sixième est 2564.

TABLEAU

la sixième puissance.

rice des quarrés 1, 3, 5, 7, etc., etc.,

	Cubes.	Cubes $\frac{1}{2}$.	Le cube doublé égale la somme du premier terme, qui est toujours 1, et du dernier terme de chaque nombre de ceux qui sont à calculer. — Cub. doublés.	Chaque cube doublé est le multiplicande, lequel, étant multiplié par la moitié de chacun de ces mêmes cubes, multicative de la moitié des termes à calculer, produit chaque 6e puissance. — 6es puissances.
1	1	$\frac{1}{8}$	2	1
2	8	4	16	64
3	27	13 $\frac{1}{2}$	54	729
4	64	32	128	4096
5	125	62 $\frac{1}{2}$	250	15625
6	216	108	432	46656
7	343	171 $\frac{1}{2}$	686	117649
8	512	256	1024	262144
9	729	364 $\frac{1}{2}$	1458	531441
10	1000	500	2000	1000000
11	1331	665 $\frac{1}{2}$	2662	1771561
12	1728	864	3456	2985984
13	2197	1098 $\frac{1}{2}$	4394	4826809
14	2744	1372	5488	7529536
15	3375	1687 $\frac{1}{2}$	6750	11390625
16	4096	2048	8192	16777216
17	4913	2456 $\frac{1}{2}$	9826	24137569
18	5832	2916	11664	34012224
19	6859	3429 $\frac{1}{2}$	13718	47045881
20	8000	4000	16000	64000000

dernier termes des 16777216 qui sont à calculer ; en multipliant 33554432, la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 8388608, la moitié du cube 16777216, laquelle est aussi la moitié de leur nombre, pour avoir 281474976710656, la sixième puissance de 256, la plus grande que contiennent 281124134038846, les trois premières tranches, puisque 288230376151649, la sixième puissance de 257, les dépasse.

Quatrièmement, pour opérer sur 2811241346388468836736, le nombre entier, 1°. nous mettons un zéro à la suite de 256, la racine, et six zéros à la suite de 281474976710656, sa sixième puissance, en sorte que 2560 est la racine sixième de 281474976710656000000 ; 2°. comme cette sixième puissance n'est pas la plus grande du nombre entier, alors nous cherchons la sixième puissance de 2564, que nous présumons en approcher le plus près, en élevant 2564 à son cube 16855982144, qui montre que nous devons sommer 16855982144 termes de la progression génératrice des quarrés pour former la sixième puissance de 2564 ; en prenant 337119264288, le double du cube 16855982144, lequel double exprime la somme des premier et dernier termes des 16855982144 qui sont à calculer ; en multipliant 337119264288, la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 8427991072, la moitié du cube 16855982144, laquelle est effectivement la moitié des termes à calculer, pour avoir ..... 2811241340388468836736, le nombre entier, dont la racine sixième est 2564.

TABLEAU

De la sixième puissance.

La progression génératrice des quarrés 1, 3, 5, 7, etc., etc., forme les sixièmes puissances.

Racines.	Chaque cube indique chaque nombre des termes de la progression génerat. desquarrés qu'on doit calculer pour former chaque 6e puissance.	La moitié de chaque cube est le multiplicateur qui coopère à trouver chaque 6e puissance.	Le cube doublé égale la somme du premier terme, qui est toujours 1, et du dernier terme de chaque nombre de ceux qui sont à calculer.	Chaque cube doublé est le multiplicande, lequel, étant multiplié par la moitié de chacun de ces mêmes cubes, indicative de la moitié des termes à calculer, produit chaque 6e puissance.
Racines.	Cubes.	Cubes $\frac{1}{2}$.	Cub. doublés.	6es puissances.
1	1	$\frac{1}{2}$	2	1
2	8	4	16	64
3	27	13 $\frac{1}{2}$	54	729
4	64	32	128	4096
5	125	62 $\frac{1}{2}$	250	15625
6	216	108	432	46656
7	343	171 $\frac{1}{2}$	686	117649
8	512	256	1024	262144
9	729	364 $\frac{1}{2}$	1458	531441
10	1000	500	2000	1000000
11	1331	665 $\frac{1}{2}$	2662	1771561
12	1728	864	3456	2985984
13	2197	1098 $\frac{1}{2}$	4394	4826809
14	2744	1372	5488	7529536
15	3375	1687 $\frac{1}{2}$	6750	11390625
16	4096	2048	8192	16777216
17	4913	2456 $\frac{1}{2}$	9826	24137569
18	5832	2916	11664	34012224
19	6859	3429 $\frac{1}{2}$	13718	47045881
20	8000	4000	16000	64000000

FORMATION

DE LA SEPTIÈME PUISSANCE

ET EXTRACTION DE SA RACINE.

CHAPITRE PREMIER.

FORMATION DE LA SEPTIÈME PUISSANCE.

La formation des septièmes puissances résulte de la progression génératrice des quarrés 1, 3, 5, 7, 9, 11, etc., et peut être calculée de deux manières.

La première consiste à savoir que les termes de cette série, calculés jusqu'à l'infini, produisent jusqu'à l'infini les quarrés qui contiennent toutes les puissances des degrés pairs, et par conséquent la sixième puissance d'une racine quelconque, laquelle d'ailleurs peut être formée par des règles appropriées à cette puissance, et puis doit être multipliée par la même racine, ou répétée autant de fois que la même racine a d'unités, pour avoir la septième puissance de cette même racine.

La seconde résulte aussi de la progression génératrice des quarrés dont le nombre est indiqué par le cube correspondant, et dont chaque terme de ce nombre, étant multiplié par la racine, ou répété autant de fois que la racine a d'unités, produit une suite de termes qui conservant entre eux la même différence, sont toujours en progression arithmétique, par conséquent calculables. Cette suite de termes progressivement reproduits se calcule, à chaque

opération, en additionnant les premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, et en multipliant chaque somme qui provient de l'addition et qui égale le double de la quatrième puissance de la racine correspondante, par la moitié du cube de la même racine, pour avoir la septième puissance de cette même racine.

Comme la première manière de former les septièmes puissances consiste à multiplier les cubes doublés des racines correspondantes par les moitiés des mêmes cubes, ensuite à multiplier les produits qui résultent de cette multiplication par les mêmes racines, alors, dans les exemples suivans, nous enseignerons seulement les règles de la seconde manière, aussi propres à satisfaire le lecteur que celles de la première, puisqu'elles sont également simples, faciles et laconiques.

Pour trouver la septième puissance de 2, 1°. 8, cube de 2, indique qu'il faut prendre les 8 termes suivans, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15; 2°. chacun de ces 8 termes doit être multiplié par la racine 2, pour avoir 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30; 3°. la sommation de ces 8 termes ainsi augmentés, dont la différence constante est 4, se fait en additionnant 2 et 30, les premier et dernier termes des 8 qu'on doit calculer, et en multipliant la somme 32, qui égale le double de 16, la quatrième puissance de 2, par 4, la moitié du cube 8, pour avoir 128, la septième puissance de 2.

Pour trouver la septième puissance de 3, 1°. 27, cube de 3, indique qu'il faut prendre les 27 termes suivans, 1, 3, 5, 7, 9 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53; 2°. chacun de ces 27 termes doit être multiplié par la racine 3, pour avoir 3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93, 99, 105, 111, 117, 123, 129, 135, 141, 147, 153, 159; 3°. la sommation de ces 27 termes ainsi augmentés, dont la différence constante est 6, se fait en additionnant 3 et 159, les premier et dernier termes des 27 qu'on

doit calculer, et en multipliant la somme 162, qui égale le double de 81, la quatrième puissance de 3, par 13 $\frac{1}{2}$, la moitié du cube 27, pour avoir 2187, la septième puissance de 3.

Cette méthode peut être exprimée plus brièvement, puisque nous obtenons la septième puissance d'une racine quelconque en multipliant le double de la quatrième puissance de la même racine, lequel double égale la somme des premier et dernier termes du nombre de ceux qui sont à calculer, et dont chacun a été pris autant de fois que la racine a d'unités, par la moitié du cube de la même racine, lequel cube est indicateur du nombre des termes qu'on doit calculer.

Pour trouver la septième puissance de 4, 1°. 64, cube de 4, indique qu'il faut prendre 64 termes de la progression génératrice des quarrés, dont chacun est multiplié par la racine 4; 2°. 512, le double de 256, la quatrième puissance de 4, lequel double égale la somme des premier et dernier termes ainsi augmentés de ceux qui sont à calculer; 3°. la multiplication de 512, la somme des premier et dernier termes des 64 qui sont à calculer, par 32, la moitié du cube 64, ou la moitié de leur nombre, produit 16384, la septième puissance de 4.

Pour trouver la septième puissance de 5, 1°. 125, cube de 5, indique qu'il faut prendre 125 termes de la progression génératrice des quarrés dont chacun est multiplié par la racine 5; 2°. 1250, le double de 625, la quatrième puissance de 5, lequel double égale la somme des premier et dernier termes ainsi augmentés de ceux qui sont à calculer; 3°. la multiplication de 1250, la somme des premier et dernier termes des 125 qui sont à calculer; par 62 $\frac{1}{2}$, la moitié du cube 125, ou la moitié de leur nombre, produit.... 78125, la septième puissance de 5.

Pour trouver la septième puissance de 6, 1°. 216, cube de 6, indique qu'il faut prendre 216 termes de la progres-

sion génératrice des quarrés dont chacun est multiplié par la racine 6; 2°. 2592, le double de 1296, la quatrième puissance de 6, lequel double égale la somme des premier et dernier termes ainsi augmentés de ceux qui sont à calculer; 3°. la multiplication de 2592, la somme des premier et dernier termes des 216 qui sont à calculer, par 108, la moitié du cube de 216, ou la moitié de leur nombre, produit.... 279936, la septième puissance de 6.

CHAPITRE DEUXIÈME.

EXTRACTION DE LA RACINE SEPTIÈME.

Les principes que nous avons donnés pour la formation de la septième puissance serviront à extraire la racine de quelques nombres donnés.

Mais avant de commencer cette extraction, il est nécessaire de savoir, 1°. que tout nombre exprimé par sept chiffres qui ont la plus grande valeur numérique, comme 9999999, a pour racine de la septième puissance le seul chiffre 9; que tout nombre exprimé par huit chiffres qui ont la plus petite valeur numérique, comme 10000000, a pour racine de la septième puissance les deux chiffres 10; 2°. que tout nombre dont on cherche la racine septième, d'après cette observation, doit être partagé, en allant de droite à gauche, par tranches de sept chiffres en sept chiffres; en sorte que chaque tranche doit avoir nécessairement sept chiffres, excepté la tranche le plus à gauche, qui peut en avoir une moindre quantité; 3°. que la racine doit avoir autant de chiffres que le nombre dont on cherche la racine septième a de tranches; 4°. qu'on doit commencer l'opération par la tranche le plus à gauche, la continuer sur les deux premières tranches, sur les trois premières tranches, etc., enfin sur le nombre entier.

EXEMPLE 1er.

340, 4825447.

D'abord nous partageons le nombre 3404825447 en deux tranches: ce partage nous fait voir que la racine doit avoir deux chiffres qui exprimeront des dixaines et des unités.

Ensuite nous extrayons la racine septième de 340, la première tranche, et nous avons 2, la racine de 128, la sep-

tième puissance la plus grande contenue dans 340, puisque 2187, la septième puissance de 3, la dépasse.

Enfin, nous cherchons la racine septième du nombre entier 3404825447. Pour la trouver, 1°. nous mettons à la suite de la racine 2 un zéro, et à la suite de sa septième puissance 128, sept zéros, en sorte que 20 est la racine septième de 1280000000. 2°. Comme cette septième puissance n'est pas la plus grande du nombre entier, alors nous cherchons celle de 21, que nous trouvons ainsi : nous élevons 21 à son cube 9261, qui indique le nombre des termes à calculer, et dont nous prenons la moitié 4630 $\frac{1}{2}$; nous élevons 21 à sa quatrième puissance 194481, que nous doublons, pour avoir 388962, la somme des premier et dernier termes des 9261 qui sont à calculer, et dont chacun a été multiplié par la racine 21; nous multiplions 388962, la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 4630 $\frac{1}{2}$, qui exprime la moitié de leur nombre, pour avoir 1801088541, la septième puissance de 21. 3°. Comme cette septième puissance n'est pas la plus approchante du nombre entier, nous cherchons celle de 22, que nous élevons à son cube 10648, qui indique le nombre des termes à calculer, et dont nous prenons la moitié 5324 ; nous élevons 22 à sa quatrième puissance 234256, que nous doublons, pour avoir 468512, la somme des premier et dernier termes des 10648 qui sont à calculer, et dont chacun a été multiplié par la racine 22; nous multiplions 468512, la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 5324, qui exprime la moitié de leur nombre, pour avoir 2494357888, la septième puissance de 22. 4°. Cette septième puissance, qui a pour racine 22, n'étant pas encore la plus approximative du nombre entier, nous cherchons celle de 23, que nous élevons à son cube 12167, qui indique le nombre des termes à calculer, et dont nous prenons la moitié 6083 $\frac{1}{2}$; nous élevons 23 à sa quatrième puissance 279841, que nous doublons pour avoir 559682, la somme des premier et dernier termes des 12167 qui sont à calculer, et dont cha-

eun a été multiplié par la racine 23; nous multiplions... 559682, la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 6083 $\frac{1}{2}$, qui exprime la moitié de leur nombre, pour avoir 3404825447, le nombre entier, qui est exactement la septième puissance de 23.

EXEMPLE II.

5794181, 9539184, 5703125.

Premièrement, nous partageons 5794181953918457031 25, le nombre entier, en trois tranches. Ce partage nous montre que la racine doit avoir trois chiffres, qui exprimeront des centaines, des dixaines et des unités.

Secondement, nous extrayons la racine septième de.... 5794181, la première tranche, et nous avons 9, la racine de 4782969, la septième puissance la plus grande que contient la première tranche, puisque 10000000, la septième puissance de 10, la dépasse.

Troisièmement, nous cherchons la racine septième de 5794181953918 4, les deux premières tranches. Pour la trouver, 1°. nous mettons à la suite de la racine 9 un zéro, et à la suite de sa septième puissance 4782969, sept zéros, en sorte que 90 est la racine septième de 4782969000000 0; 2°. comme cette septième puissance ne nous paraît pas la plus approximative des deux premières tranches, alors nous cherchons celle de 91, que nous trouvons ainsi: nous élevons 91 à son cube 753571, qui indique le nombre des termes à calculer, et dont nous prenons la moitié 376785 $\frac{1}{2}$; nous élevons 91 à sa quatrième puissance 68574961, que nous doublons, pour avoir 137149922, la somme des premier et dernier termes des 753571 qui sont à calculer, et dont chacun a été multiplié par la racine 91; nous multiplions.... 137149922, la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 376785 $\frac{1}{2}$, la moitié du cube 753571, qui exprime la moitié de leur nombre, pour avoir.....

51676101935731, la septième puissance de 91 ; nous élevons 92 à son cube 778688, qui indique le nombre des termes à calculer, et dont nous prenons la moitié 389344; nous élevons 92 à sa quatrième puissance 71639296, que nous doublons, pour avoir 143278592, la somme des premier et dernier termes des 778688, qui sont à calculer, et dont chacun a été multiplié par la racine 92; nous multiplions 143278592, la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 389344, la moitié du cube 778688, qui exprime la moitié de leur nombre, pour avoir 55784660123648, la septième puissance de 92, qui nous paraît la plus approximative des deux premières tranches.

Quatrièmement, nous cherchons la racine septième du nombre entier 579418195391845703125. Pour la trouver, 1°. nous mettons à la suite de la racine 92 un zéro, et à la suite de sa septième puissance 55784660123648, sept zéros, en sorte que 920 est la racine septième de............... 557846601236480000000; 2°. comme cette septième puissance nous paraît éloignée de celle qui est la plus approximative du nombre entier, alors nous cherchons celle de 921, en élevant 921 à son cube 781229961, qui indique le nombre des termes à calculer, et dont nous prenons la moitié..... 390614980 ½ ; en élevant 921 à sa quatrième puissance.... 719512794081, que nous doublons, pour avoir......... 1439025588162; en multipliant 1439025588162, la somme des premier et dernier termes des 781229961 qui sont à calculer, par 390614980 ½, qui désigne la moitié de leur nombre, pour avoir 562104952058900660841, la septième puissance de 921. Afin de connaître approximativement la racine septième du nombre entier, nous avons soustrait... 557846601236480000000, la septième puissance de 920, de 562104952058900660841, la septième puissance de 921, pour avoir la première différence 4258350822420660841; ensuite nous avons soustrait 562104952058900660841, la septième puissance de 921, de 579418195391845703125, le

nombre entier, pour avoir la seconde différence..... 1731324333294504228 4; enfin, nous avons cherché combien de fois la première différence est contenue dans la seconde, nous avons trouvé quatre; alors nous avons présumé que 925 pouvait bien être la racine septième du nombre entier. Ainsi nous trouvons bien la septième puissance de 925, que nous pensons être la plus grande du nombre entier, en élevant 925 à son cube 791453125, qui indique le nombre de termes à calculer, et dont nous prenons la moitié 395726562 $\frac{1}{2}$; en élevant 925 à sa quatrième puissance 732094140625, que nous doublons, pour avoir 1464188281250, la somme des premier et dernier termes des 791453125 qui sont à calculer, et dont chacun a été multiplié par la racine 925; en multipliant 1464188281250, la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 395726562 $\frac{1}{2}$, la moitié du cube 791453125, qui exprime la moitié de leur nombre, pour avoir 579418195391845703125, le nombre entier, qui est exactement la septième puissance de 925.

TABLEAU

De la septième puissance.

La progression génératrice des quarrés 1, 3, 5, 7, etc., etc., forme les septièmes puissances.

Racin.	Chaque cube indique chaque nombre des termes de la série primitive qu'on doit calculer pour former chaque 7e puissance.	La moitié de chaque cube est le multiplicateur servant à trouver chaque 7e puissance.	4es puissanc.	Chaque 4e puissance doublée est le multiplicande, et égale la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer pour former chaque 7e puissance, et dont chacun a été multiplié par chaque racine correspondante.	Chaque 4e puissance doublée, multipliée par la moitié de chaque cube correspondant, produit la 7e puissance de chaque racine correspondante.
Rac.	Cubes.	Cubes $\frac{1}{2}$.	4es puiss.	4es puissances doublées.	7es puissances.
1	1	$\frac{1}{2}$	1	2	1
2	8	4	16	32	128

Raç.	Cubes.	Cubes $\frac{1}{2}$.	4es puiss.	4es puissances doublées.	7es puissances.
3	27	13 $\frac{1}{2}$	81	162	2187
4	64	32	256	512	16384
5	125	62 $\frac{1}{2}$	625	1250	78125
6	216	108	1296	2592	279936
7	343	171 $\frac{1}{2}$	2401	4802	823543
8	512	256	4096	8192	2097152
9	729	364 $\frac{1}{2}$	6561	13122	4782969
10	1000	500	10000	20000	10000000
11	1331	665 $\frac{1}{2}$	14641	29282	19487171
12	1728	864	20736	41472	35831808
13	2197	1098 $\frac{1}{2}$	28561	57122	62748517
14	2744	1372	38416	76832	105413504
15	3375	1687 $\frac{1}{2}$	50625	101250	170859375
16	4096	2048	65536	131072	268435456
17	4913	2456 $\frac{1}{2}$	83521	167042	410338673
18	5832	2916	104976	209952	612220032
19	6859	3429 $\frac{1}{2}$	130321	260642	893871739
20	8000	4000	160000	320000	1280000000

FORMATION

DE LA HUITIÈME PUISSANCE

ET EXTRACTION DE SA RACINE.

CHAPITRE PREMIER.

FORMATION DE LA HUITIÈME PUISSANCE.

Avant de nous occuper à extraire la racine huitième d'un nombre quelconque, nous ferons connaître la manière de former les huitièmes puissances, résultantes de la progression génératrice des quarrés 1, 3, 5, 7, etc., etc.

Leur formation consiste à connaître le nombre des termes de cette série qu'il faut sommer, et la manière de les sommer. Or, la quatrième puissance de chaque racine désigne le nombre des termes qu'on doit calculer pour former la huitième puissance de chacune d'elles; et le tableau ci-après nous fait comprendre comment la sommation de ces termes se calcule pour trouver les huitièmes puissances des nombres.

Ce tableau a cinq colonnes : la première contient les racines; la seconde, chaque quatrième puissance des racines, désigne chaque nombre des termes de la progression génératrice des quarrés qu'on doit calculer pour former chaque huitième puissance; la troisième, la moitié de chaque quatrième puissance, laquelle est le multiplicateur, qui contribue à trouver chaque huitième puissance; la quatrième, la somme du premier terme, qui est toujours 1, et du dernier terme de ceux qui sont à calculer, laquelle égale le double de chaque quatrième puissance correspondante; la

quième, chaque somme des premier et dernier termes ceux qui sont à calculer, étant multipliée par la moitié chacune de ces quatrièmes puissances, indicative de la oitié de leur nombre à calculer, produit chaque huitième issance.

Les principes exprimés dans ce tableau feront voir la lidité de ce calcul, et la facilité avec laquelle on parvient à ouver les huitièmes puissances les plus grandes contenues ns plusieurs nombres, et par cela même à connaître leurs cines.

Lorsqu'il s'agit de former la huitième puissance de 2, 16, quatrième puissance de 2, désigne qu'il faut additionner s 16 premiers termes 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 1, 23, 25, 27, 29, 31, pour avoir la somme 256, la hui- ième puissance de 2.

Lorsqu'il s'agit de former la huitième puissance de 3, 81, a quatrième puissance de 3, désigne qu'il faut additionner s 81 premiers termes de la progression génératrice des arrés 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 9, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99, 101, 103, 105, 107, 109, 111, 113, 115, 117, 119, 121, 123, 125, 127, 129, 131, 133, 135, 137, 139, 141, 143, 145, 147, 149, 151, 153, 155, 157, 159, 161, pour avoir la somme 6561, la huitième puissance de 3.

Comme il est facile de voir que l'addition deviendrait trop longue quand il faudrait sommer de nombreux termes de la progression, nous nous servirons de la multiplication, qui est une addition abrégée, afin de calculer avec plus de promptitude et autant d'exactitude tous ceux qui seront absolument nécessaires pour former chaque huitième puissance. Ainsi, cette sommation consiste à prendre le double de chaque quatrième puissance de la racine, pour avoir la somme des premier et dernier termes du nombre de ceux

qui sont à calculer, puis à multiplier le double de chaque quatrième puissance, lequel égale la somme des premier et dernier termes, par la moitié de la quatrième puissance, qui désigne la moitié de leur nombre à calculer, pour avoir un produit qui est vraiment la huitième puissance de la racine.

Lorsqu'il s'agit de former la huitième puissance de 4, 256, la quatrième puissance de 4, désigne qu'il faut sommer 256 termes de la progression. Cette sommation consiste, 1°. à prendre 512, le double de la quatrième puissance 256, lequel égale la somme des premier et dernier termes des 256 qui sont à calculer; 2°. à multiplier 512, la somme des premier et dernier termes, par 128, la moitié de leur nombre à calculer, pour avoir 65536, la huitième puissance de 4.

Lorsqu'il s'agit de former la huitième puissance de 5, 625, la quatrième puissance de 5, désigne qu'il faut sommer 625 termes de la progression. Cette sommation consiste, 1°. à prendre 1250, le double de la quatrième puissance 625, lequel égale la somme des premier et dernier termes des 625 qui sont à calculer; 2°. à multiplier 1250, la somme des premier et dernier termes, par 312 $\frac{1}{2}$, la moitié de la quatrième puissance 625, qui exprime la moitié de leur nombre à calculer, pour avoir 390625, la huitième puissance de 25.

Lorsqu'il s'agit de former la huitième puissance de 6, 1296, la quatrième puissance de 6, désigne qu'il faut sommer 1296 termes de la progression. Cette sommation consiste, 1°. à prendre 2592, le double de la quatrième puissance 1296, lequel égale la somme des premier et dernier termes des 1296 qui sont à calculer; 2°. à multiplier 2592, la somme des premier et dernier termes, par 648, la moitié de la quatrième puissance 1296, qui exprime la moitié de leur nombre à calculer, pour avoir 1679616, la huitième puissance de 6.

CHAPITRE DEUXIÈME.

EXTRACTION DE LA RACINE HUITIÈME.

Dès que nous connaissons maintenant les règles qui nous nt trouver avec certitude les huitièmes puissances des mbres, dès que nous savons qu'il faut suivre invariaement ces mêmes règles pour obtenir l'extraction de la cine huitième d'un nombre donné, alors nous nous y conrmerons; mais auparavant de nous en occuper, il est bon e dire, 1°. que tout nombre exprimé par huit chiffres qui nt la plus grande valeur numérique, comme 99999999, a our racine huitième le seul chiffre 9; que tout nombre primé par neuf chiffres qui ont la plus petite valeur numérique, comme 100000000, a pour racine huitième les eux chiffres 10; 2°. que tout nombre dont on cherche la acine huitième, d'après cette observation, doit être pargé, en allant de droite à gauche, par tranches de huit hiffres en huit chiffres, en sorte que chaque tranche doit voir nécessairement huit chiffres, excepté la tranche le lus à gauche, qui peut en avoir une moindre quantité; °. que la racine doit avoir autant de chiffres que le nombre n'on veut extraire a de tranches; 4°. qu'on commence extraction de la racine huitième par la tranche le plus à auche, qu'on la continue sur les deux premières tranhes, etc., et qu'enfin on la termine sur le nombre entier.

EXEMPLE Ier.

200476, 12231936.

Ayant partagé le nombre 200476122319 36 en deux tran-

ches, nous devons avoir à la racine deux chiffres, qui exprimeront des dixaines et des unités.

D'abord, nous commençons à extraire la racine huitième de 200476, la tranche le plus à gauche ; le chiffre 4, qui en est extrait, est la racine de 65536, la huitième puissance la plus grande de cette première tranche, puisque 390625, la huitième puissance de 5, l'excède.

Enfin, nous cherchons à extraire la racine du nombre entier 200476122319 36. Afin d'obtenir cette extraction, 1°. nous mettons un zéro à la suite de 4, la racine, et huit zéros à la suite de 65536, sa huitième puissance, en sorte que 40 est la racine huitième de 6553600000000 ; 2°. comme cette huitième puissance n'est pas la plus grande du nombre entier, ainsi que celles des racines 41, 42, 43, 44, 45, que nous avons successivement formées et vérifiées, nous allons chercher celle de 46 ; 3°. pour la trouver, nous élevons 46 à sa quatrième puissance 4477456, laquelle désigne que nous devons sommer 4477456 termes de la progression génératrice des quarrés, pour former la huitième puissance de 46 ; 4°. nous prenons 8954912, le double de la quatrième puissance 4477456, lequel exprime la somme des premier et dernier termes des 4477456 qui sont à calculer ; 5°. nous multiplions 8954912, la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 2238728, la moitié de la quatrième puissance 4477456, qui est aussi la moitié des termes à calculer, pour avoir 200476122319 36, le nombre entier, qui est exactement la huitième puissance de 46.

EXEMPLE II.

74578951, 13399572, 05139456.

Ayant partagé le nombre 7457895113399572051 39456 en trois tranches, nous devons avoir à la racine trois chiffres, qui exprimeront des centaines, des dixaines et des unités.

D'abord, nous commençons à extraire la racine huitième

de 74578951, la première tranche; le chiffre 9, qui en est extrait, exprime 9 centaines et est la racine de 43046721, la huitième puissance la plus grande de 74578951, la première tranche, puisque 100000000, la huitième puissance de 10, la dépasse.

Ensuite, pour extraire la racine de 7457895113399572, les deux premières tranches, 1°. nous mettons un zéro à la suite de 9, la racine, et huit zéros à la suite de 43046721, sa huitième puissance, en sorte que 90 est la racine huitième de 4304672100000000. 2°. Comme cette huitième puissance est bien inférieure aux deux premières tranches, nous avons successivement cherché les huitièmes puissances des racines 91, 92, 93, 94, 95, que nous avons obtenues en nous conformant à nos règles, et que nous avons trouvées ne pas en approcher assez près; maintenant nous voulons chercher la huitième puissance de 96, à l'effet de savoir si elle est la plus grande des deux premières tranches. 3°. Nous élevons 96 à sa quatrième puissance 84934656, qui exprime que nous devons sommer 84934656 termes de la progression pour former la huitième puissance de 96; puis nous prenons 169869312, le double de la quatrième puissance 84934656, lequel double énonce la somme des premier et dernier termes des 84934656 qui sont à calculer, par 42467328, la moitié de la quatrième puissance 84934656, qui est aussi la moitié des termes à calculer, pour avoir 7113915799838336, la huitième puissance de 96, la plus approximative de 7457895113399572, les deux premières tranches, puisque 7837433594376961, la huitième puissance de 97, les dépasse.

Enfin, pour extraire la racine de.....
74578951133995720513945 6, le nombre entier, 1°. nous mettons un zéro à la suite de 96, la racine, et huit zéros à la suite de 7113915799838336, sa huitième puissance, en sorte que 960 est la racine huitième de.....
711391579983833600000000. 2°. Comme cette huitième puis-

sance n'est pas la plus grande du nombre entier, ainsi que celles des racines 961, 962, 963, que nous avons obtenues en suivant les règles que nous avons enseignées, alors nous allons chercher la huitième puissance de 964. 3°. Nous élevons 964 à sa quatrième puissance 8635910556 16, qui exprime que nous devons sommer 8635910556 16 termes de la progression pour former la huitième puissance de 964; nous prenons 172718211123 2, le double de la quatrième puissance, lequel énonce la somme des premier et dernier termes des 8635910556 16 qui sont à calculer; nous multiplions 172718211123 2, la somme des premier et dernier termes des 8635910556 16 qui sont à calculer, par..... 431795527808, la moitié de la quatrième puissance..... 8635910556 16, laquelle moitié est précisément celle du nombre des termes qu'on doit calculer, pour avoir le produit 74578951133995720513 9456, le nombre entier, qui est exactement la huitième puissance de 964.

TABLEAU

De la huitième puissance.

La progression génératrice des quarrés 1, 3, 5, etc., etc., forme les huitièmes puissances.

Racines.	Chaque 4e puissance indique chaque nombre des termes de la progression à calculer pour former chaque 8e puissance.	La moitié de chaque 4e puissance est le multiplicateur qui coopère à trouver chaque 8e puissance.	Le double de chaque 4e puissance est la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer pour former chaque 8e puiss.	Le double de chaque 4e puissance, qui égale la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, multiplié par la moitié de chaque 4e puissance, produit chaque 8e puissance.
Racines.	4es puissanc.	4es puiss. $\frac{1}{2}$.	4es puissances doublées.	8es puissances.
1	1	$\frac{1}{2}$	2	1
2	16	8	32	256
3	81	40 $\frac{1}{2}$	162	6561

Racines.	4es puissanc.	4es puiss. ½.	4es puissances doublées.	8es puissances.
4	256	128	512	65336
5	625	312 ½	1250	390625
6	1296	648	2592	1679616
7	2401	1200 ½	4802	5764801
8	4096	2048	8192	16777216
9	6561	3280 ½	13122	43046721
10	10000	5000	20000	100000000
11	14641	7320 ½	29282	214358881
12	20736	10368	41472	429981696
13	28561	14280 ½	57122	815730721
14	38416	19208	76832	1475789056
15	50625	25312 ½	101250	2562890625
16	65536	32768	131072	4296967296
17	83521	41760 ½	167042	6975757441
18	104976	52488	209952	11019960576
19	130321	65160 ½	260641	16983563041
20	160000	80000	320000	25600000000

FORMATION

DE LA NEUVIÈME PUISSANCE

ET EXTRACTION DE SA RACINE.

CHAPITRE PREMIER.

FORMATION DE LA NEUVIÈME PUISSANCE.

La formation des neuvièmes puissances résulte également de la progression génératrice des quarrés, et peut être calculée de deux manières. La première manière consiste à savoir que les huitièmes puissances, ainsi que nous l'avons montré précédemment, peuvent être formées par des règles qui leur sont appropriées, et que chacune de ces mêmes puissances ainsi formées, étant multipliée par chacune des racines correspondantes, produit chaque neuvième puissance de ces mêmes racines.

La seconde consiste à savoir, 1°. que la quatrième puissance de chaque racine indique justement chaque nombre des termes de cette série qu'on doit nécessairement prendre pour trouver la neuvième puissance de la racine correspondante; 2°. que chaque terme de chaque nombre doit être multiplié par la même racine; 3°. que la sommation de chaque nombre de ces mêmes termes ainsi augmentés doit être faite, en additionnant les premier et dernier termes de chaque nombre et en multipliant la somme qui résulte de cette addition, et qui toujours égale le double de la cinquième puissance de la racine correspondante, par la moitié de la quatrième puissance de la même racine, afin d'ob-

tenir sa neuvième puissance. C'est d'après les règles de cette seconde manière que nous obtiendrons la formation de quelques nombres, et que nous connaîtrons simultanément leurs racines.

Pour trouver la neuvième puissance de 2, 1°. 16, la quatrième puissance de 2, indique qu'il faut prendre les seize termes suivans : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31 ; 2°. chacun de ces seize termes doit être multiplié par la racine 2, pour avoir 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46, 50, 54, 58, 62; 3°. la sommation de ces seize termes ainsi augmentés, dont la différence constante est 4, se fait en additionnant 2 et 62, les premier et dernier termes, et en multipliant la somme 64, qui égale le double de 32, la cinquième puissance de 2, par 8, la moitié de 16, la quatrième puissance de 2, laquelle exprime la moitié du nombre des termes à calculer, pour avoir 512, la neuvième puissance de 2.

Puisque la neuvième puissance d'une racine quelconque peut aisément s'obtenir en multipliant le double de la cinquième puissance de la même racine, lequel double exprime la somme des premier et dernier termes du nombre de ceux qu'on doit calculer, et dont chacun a été pris autant de fois que la même racine a d'unités, par la moitié de la quatrième puissance de la même racine indicative de la moitié de leur nombre.

Pour trouver la neuvième puissance de 3, 1°. 81, la quatrième puissance de 3, indique qu'il faut sommer 81 termes de la progression génératrice des quarrés; 2°. chacun de ces 81 termes doit être multiplié par la racine 3; 3°. la sommation de ces 81 termes ainsi augmentés se fait en multipliant 486, le double de 243, la cinquième puissance de 3, qui égale la somme des premier et dernier termes des 81 qui sont à calculer, par 40 $\frac{1}{2}$, la moitié de la quatrième puissance 81, qui est aussi la moitié de leur nombre, pour avoir 19683, la neuvième puissance de 3.

Pour trouver la neuvième puissance de 4, 1°. 256, la quatrième puissance de 4, indique qu'il faut sommer 256 termes de la progression génératrice des quarrés; 2°. chacun de ces 256 termes doit être multiplié par la racine 4; 3°. la sommation de ces 256 termes ainsi augmentés se fait en multipliant 2048, le double de 1024, la cinquième puissance de 4, qui égale la somme des premier et dernier termes des 256 qui sont à calculer, par 128, la moitié de la quatrième puissance 256, qui est aussi la moitié de leur nombre, pour avoir 262144, la neuvième puissance de 4.

Pour trouver la neuvième puissance de 5, nous multiplions 6250, le double de 3125, la cinquième puissance de 5, lequel double égale la somme des premier et dernier termes des 625 qui sont à calculer, et dont chacun a été multiplié par la racine 5, par 312 $\frac{1}{2}$, la moitié de 625, la quatrième puissance de 5, qui indique le nombre des termes à calculer, et par conséquent la moitié de leur nombre, pour avoir 1953125, la neuvième puissance de 5.

Pour trouver la neuvième puissance de 6, nous multiplions 15552, le double de 7776, la cinquième puissance de 6, lequel double égale la somme des premier et dernier termes des 1296 qui sont à calculer, et dont chacun a été multiplié par la racine 6, par 648, la moitié de 1296, la quatrième puissance de 6, qui indique aussi la moitié de leur nombre, pour avoir 10077696, la neuvième puissance de 6.

CHAPITRE DEUXIÈME.

EXTRACTION DE LA RACINE NEUVIÈME.

La méthode que nous avons donnée pour la formation des neuvièmes puissances nous servira à extraire la racine de quelques nombres donnés.

Mais avant de commencer cette extraction, il est utile de savoir, 1°. que tout nombre exprimé par neuf chiffres qui ont la plus grande valeur numérique, comme 999999999, a pour racine de la neuvième puissance le seul chiffre 9; que tout nombre exprimé par dix chiffres qui ont la plus petite valeur numérique, comme 1000000000, a pour racine de la neuvième puissance les deux chiffres 10; 2°. que tout nombre dont on cherche la racine neuvième, d'après cette remarque, doit être partagé, en allant de droite à gauche, par tranches de neuf chiffres en neuf chiffres, en sorte que chaque tranche doit avoir nécessairement neuf chiffres, excepté la tranche le plus à gauche, qui peut en avoir une moindre quantité; 3°. que la racine doit avoir autant de chiffres que le nombre dont on cherche la racine neuvième a de tranches; 4°. qu'on doit commencer l'opération par la tranche le plus à gauche, la continuer sur les deux premières tranches, etc., enfin, sur le nombre entier.

EXEMPLE Ier.

35184, 372988832.

Ayant partagé le nombre 35184372088832 en deux tranches, nous devons avoir à la racine deux chiffres, qui exprimeront des dixaines et des unités.

Ce partage fait, nous extrayons la racine neuvième de 35184; la première tranche. Le chiffre 3, qui exprime trois dixaines, est la racine de 19683, la neuvième puissance la plus grande que contienne 35184, la première tranche, puisque 262144, la neuvième puissance de 4, la dépasse.

Ensuite, l'extraction de la racine 3 de la neuvième puissance 19683, la plus grande que contienne 35184, la première tranche, étant faite, nous cherchons celle de..... 351843720888 32, le nombre entier. Pour la trouver, 1°. nous mettons à la suite de la racine 3 un zéro, et à la suite de sa neuvième puissance 19683, neuf zéros, en sorte que 30 est la racine neuvième de 19683000000000. 2°. Comme cette neuvième puissance, qui a pour racine 30, n'est pas la plus grande du nombre entier, alors nous cherchons celle de 31, que nous trouvons en multipliant 5725830 2, le double de 28629151, la cinquième puissance de 31, lequel double égale la somme des premier et dernier termes des 923521 qui sont à calculer, et dont chacun a été multiplié par la racine 31, par 461760 $\frac{1}{2}$, la moitié de 923521, la quatrième puissance de 31, indicative du nombre des termes à calculer, pour avoir 26439622160721, la neuvième puissance de 31. 3°. Comme nous présumons que cette neuvième puissance, qui a pour racine 31, n'est pas la plus grande du nombre entier, alors nous cherchons celle de 32, que nous trouvons en multipliant 67108864, le double de.. 33554432, la cinquième puissance de 32, lequel double égale la somme des premier et dernier termes des 1048576 qui sont à calculer, et dont chacun a été multiplié par la racine 32, par 524288, la moitié de 1048576, la quatrième puissance de 32, indicative du nombre des termes à calculer, pour avoir le nombre entier 351843720888 32, qui est exactement la neuvième puissance de 32.

EXEMPLE II.

91351724, 48364089.

Ayant partagé le nombre 9135172474836408 99 en deux tranches, nous devons avoir à la racine deux chiffres, qui exprimeront des dixaines et des unités.

D'abord, nous extrayons 9, la racine de 387420489, la neuvième puissance la plus grande que contienne 91351724 7, la première tranche, puisque 1000000000, la neuvième puissance de 10, la dépasse.

Ensuite, pour extraire la racine de 9135172474836408 99, le nombre entier, nous mettons à la suite de 9, la racine, un zéro, et à la suite de 387420489, sa neuvième puissance, neuf zéros, en sorte que 90 est la racine neuvième de 387420489000000000. Comme cette neuvième puissance, qui a pour racine 90, nous paraît éloignée du nombre entier, alors nous cherchons celle de 91; or, pour la trouver, 1°. nous savons que 68574961, la quatrième puissance de 91, indique infailliblement le nombre des termes qu'on doit calculer, afin d'obtenir la neuvième puissance de 91; 2°. que chaque terme de ce même nombre doit être multiplié par la racine 91; 3°. que la sommation de ces mêmes termes ainsi augmentés doit être faite en additionnant les premier et dernier termes de ce nombre, et en multipliant la somme qui résulte de cette addition, et qui égale 12480642902, le double de 6240321451, la cinquième puissance de 91, par 34287480 $\frac{1}{2}$, la moitié de 68574961, la quatrième puissance de 91, indicative du nombre des termes à calculer, pour avoir 427929800129788411, la neuvième puissance de 91. Afin de connaître la quantité d'unités qu'on doit ajouter à la racine 91, à l'effet d'approximer, autant que possible, la neuvième puissance du nombre à diviser, nous soustrayons 387420489000000000, la neuvième puissance de 90, de 427929800129788411, la neu-

vième puissance de 91 ; la première différence est..... 405093111297884 11 ; nous soustrayons 427929800129788411, la neuvième puissance de 91, de 91351724748364089 9, le nombre entier; la seconde différence est 48558744735385248 8; nous cherchons combien de fois la première différence est contenue dans la seconde ; le quotient 8, qui résulte de cette opération, étant ajouté à la racine 91, alors nous cherchons la neuvième puissance de la racine 99. Pour la trouver, 1°. nous savons que 96059601, la quatrième puissance de 99, indique nécessairement le nombre des termes qu'on doit calculer, afin d'obtenir la neuvième puissance de 99 ; 2°. que chaque terme de ce même nombre doit être multiplié par la racine 99; que la sommation de ces mêmes termes ainsi augmentés doit être faite en additionnant les premier et dernier termes de ce nombre, et en multipliant la somme qui résulte de cette addition, et qui égale 1901980099 8, le double de 950990049 9, la cinquième puissance de 99, par 48029800 $\frac{1}{2}$, la moitié de 96059601, la quatrième puissance de 99, indicative du nombre des termes à calculer, pour avoir 91351724748364089 9, le nombre entier, qui est exactement la neuvième puissance de 99.

TABLEAU

De la neuvième puissance.

La progression génératrice des quarrés 1, 3, 5, etc., etc., quand chaque terme de cette série a été multiplié par la racine correspondante, forme les neuvièmes puissances.

Racin.	Chaque 4e puissance indique chaque nombre des termes à calculer, dont chacun a été multiplié par la racine correspondante, pour former chaque 9e puissance.	La moitié de chaque 4e puissanc. est le multiplicateur qui sert à trouver chaque 9e puissance.	5es puissanc.	Le double de la 5e puissance de la racine correspondante égale la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, et dont chacun a été multiplié par la même racine.	Chaque 5e puissance doublée, multipliée par la moitié de chaque 4e puissance de la racine correspondante, produit chaque 9e puissance de la même racine.
Rac.	4es puiss.	4es puiss. $\frac{1}{2}$.	5es puiss.	5es puissances doublées.	9es puissances.
1	1	$\frac{1}{2}$	1	2	1
2	16	8	32	64	512
3	81	$40\frac{1}{2}$	243	486	19683
4	256	128	1024	2048	262144
5	625	$312\frac{1}{2}$	3125	6250	1953125
6	1296	648	7776	15552	10077696
7	2401	$1200\frac{1}{2}$	16807	33614	40353607
8	4096	2048	32768	65536	134217728
9	6561	$3280\frac{1}{2}$	59049	118096	387420489
10	10000	5000	100000	200000	1000000000
11	14641	$7320\frac{1}{2}$	161051	322102	2357947691
12	20736	10368	248832	497664	5159780352
13	28561	$14280\frac{1}{2}$	371293	742586	10604499373
14	38416	19208	537824	1075648	20661046784
15	50625	$25312\frac{1}{2}$	759375	1518750	38443359375
16	65536	32768	1048576	2097152	68719476736
17	83521	$41760\frac{1}{2}$	1419857	2839714	118587876497
18	104976	52488	1889568	3779136	198359290368
19	130321	$65160\frac{1}{2}$	2476099	4952198	322687697779
20	160000	80000	3200000	6400000	512000000000

RÉCAPITULATION

Des règles employées à former les puissances et à extraire leurs racines, résultantes de la progression génératrice des quarrés 1, 3, 5, 7, etc.

Nous allons donner brièvement les règles qui résultent de la progression génératrice des quarrés 1, 3, 5, 7, 9, 11, etc., pour former les puissances et extraire leurs racines.

Les règles consistent, 1°. à connaître le nombre des termes de cette série qu'on doit nécessairement calculer pour former chaque puissance et extraire la racine de chacune d'elles; 2°. la manière de les calculer pour opérer ce double résultat.

Mais comme le nombre des termes varie à chaque puissance d'un degré pair qu'on doit former ou dont on doit extraire la racine, et dépend de la connaissance de chaque puissance inférieure; comme le même nombre des termes, dont chacun a été multiplié par la racine correspondante ou a été pris autant de fois que cette même racine contient d'unités, sert pour la puissance d'un degré impair qui la suit immédiatement; comme aussi il est important de connaître la manière de calculer chaque nombre, tant pour la formation des puissances des degrés pairs et l'extraction de leur racines que pour la formation des puissances des degrés impairs et l'extraction de leurs racines, il est essentiel de revoir brièvement les puissances que nous avons formées et dont nous avons extrait les racines, à l'effet de découvrir, autant qu'il nous sera possible, le rapport qu'il y a entre les puissances antérieures indistinctes et les puissances postérieures qu'on a successivement formées ou dont les racines ont été extraites; d'avoir une connaissance précise de la manière de calculer chaque nombre indiqué par chaque puis-

ice antérieure, afin de produire le double effet tant pour mer chaque puissance postérieure des degrés pairs et ex- ire chaque racine que pour former chaque puissance des grés impairs et extraire chacune de leurs racines. Ainsi, la ogression génératrice des quarrés est l'origine de toutes les issances, puisque les termes de cette série, calculés d'après s règles aussi simples que sûres, forment les puissances des egrés pairs et servent à extraire leurs racines. Les mêmes rmes de cette série, dont chacun a été multiplié par la ra- ne correspondante ou dont chacun a été pris autant de fois ue la racine correspondante a d'unités, calculés d'après les gles appropriées à chacune d'elles, produisent les puis- nces des degrés impairs et nous font trouver leurs racines.

Pour nous expliquer plus méthodiquement, nous commencerons par le cube, ensuite nous suivrons, sans interruption, quelques autres puissances.

Premièrement, les nombres naturels 1, 2, 3, 4, etc., etc., ui sont identiquement les racines et les termes de la pre- mière puissance, indiquent chaque nombre des termes de la progression qu'on doit calculer pour former chaque cube, n observant néanmoins que chaque nombre est pris consé- utivement.

Ainsi, 2, dont on veut le cube, indique qu'il faut addi- tionner 3 et 5, deux termes de la progression, pour avoir la somme 8, cube de 2.

3, dont on veut le cube, indique qu'il faut additionner 7, 9 et 11, 3 termes de la progression, pour avoir la somme 27, cube de 3.

4, dont on veut le cube, indique qu'il faut additionner 13, 15, 17 et 19, 4 termes de la progression, pour avoir la somme 64, cube de 4.

Lorsque les racines indiquent de nombreux termes à calculer pour former les cubes, il est nécessaire de connaître les premier et dernier termes de chaque nombre, savoir; le premier terme, qu'on obtient en multipliant la racine dont

on veut le cube par celle qui la précède immédiatement, et en ajoutant au produit une unité; le dernier terme, qu'on obtient en ajoutant au premier terme le double de la racine précédente, à l'effet de multiplier leur somme par la moitié de la racine indicative de la moitié de leur nombre, et par cela même d'avoir plus promptement un produit, qui est exactement le cube cherché.

La racine 54, dont on veut le cube, indique qu'il faut calculer 54 termes de la progression, qui doivent être pris à la suite de ceux qui sont destinés à former le cube de la racine 53. Or, comme nous voulons employer dans ce calcul la multiplication, afin d'obtenir plus promptement un produit qui sera le cube cherché, 1°. nous avons le premier terme 2863, en multipliant 54 par 53, la racine précédente, et en ajoutant au produit 2862 une unité; le dernier terme 2969, en ajoutant au premier terme 2863, 106, le double de 53, la racine précédente; 2°. nous multiplions 5832, la somme de 2863 et de 2969, les premier et dernier termes du nombre de ceux qui sont à calculer, par 27, la moitié de la racine 54, qui énonce la moitié de leur nombre, pour avoir le produit 157464, qui est vraiment le cube de 54.

Ces règles, qui servent à former tous les cubes possibles, servent aussi à extraire la racine cubique d'un nombre quelconque, qu'on aura auparavant partagé de trois chiffres en trois chiffres, en sorte que chaque tranche doit avoir nécessairement trois chiffres, excepté la tranche le plus à gauche, qui peut en avoir une moindre quantité.

Secondement, les quarrés 1, 4, 9, 16, etc., etc., indiquent chaque nombre des termes de la progression qu'on doit calculer pour former chaque quatrième puissance, en observant néanmoins que l'unité est toujours le premier terme de chaque nombre.

Ainsi, 4, le quarré de la racine 2; de laquelle on cherche la quatrième puissance, indique qu'il faut additionner les 4

mes suivans, 1, 3, 5, 7, pour avoir la somme 16, la quatrième puissance de 2.

9, le quarré de la racine 3, de laquelle on cherche la quatrième puissance, indique qu'il faut additionner les 9 termes ivans, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, pour avoir la somme , la quatrième puissance de 3.

16, le quarré de la racine 4, de laquelle on cherche la atrième puissance, indique qu'il faut additionner les 16 rmes suivans, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, , 27, 29, 31, pour avoir la somme 256, la quatrième issance de 4.

Lorsque les quarrés indiquent les termes nombreux de la ogression à calculer pour avoir les quatrièmes puissances, faut savoir, afin de remplacer l'addition par la multiication, qui nous fera connaître avec autant de brièveté ie d'exactitude leur sommation, 1°. que la somme des preier et dernier termes de chaque nombre égale toujours le ouble du quarré correspondant; 2°. que la moitié du quarré orrespondant exprime toujours la moitié des termes à calculer; 3°. que la somme des premier et dernier termes de haque nombre, multipliée par la moitié de ses termes, prouit exactement la quatrième puissance de la racine correspondante.

625, le quarré de 25, indique qu'il faut calculer 625 termes de la progression pour former la quatrième puissance e 25. Afin de remplacer l'addition par la multiplication, ui nous fera connaître plus brièvement leur sommation, ous savons, 1°. que la somme des premier et dernier termes les 625 qui sont à calculer égale 1250, le double du quarré 25; 2°. que 312 $\frac{1}{2}$, la moitié du quarré 625, est justement a moitié du nombre des termes à calculer; 3°. que 1250, la omme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, multipliée par 312 $\frac{1}{2}$, la moitié de leur nombre, proluit 390625, qui est vraiment la quatrième puissance de 25.

Ces principes, qui servent à former toutes les quatrièmes

puissances, servent aussi à extraire la racine quatrième d'un nombre quelconque, qu'on aura auparavant partagé par tranches de quatre chiffres en quatre chiffres, en sorte que chaque tranche doit avoir nécessairement quatre chiffres, excepté la tranche le plus à gauche, qui peut en avoir une moindre quantité.

Troisièmement, les termes de la progression génératrice des quarrés 1, 3, 5, 7, etc., etc., produisent jusqu'à l'infini les quarrés des nombres naturels. Chaque nombre des termes de cette série, dont chacun a été multiplié par la racine correspondante, ou pris autant de fois que la racine correspondante a d'unités, est indiqué par chaque quarré correspondant. La sommation de chaque nombre des termes ainsi augmentés, pour avoir la cinquième puissance cherchée, se fait en multipliant la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, laquelle égale toujours le double du cube de la racine correspondante, par la moitié du quarré de la même racine, qui exprime la moitié de leur nombre, pour avoir un produit qui est vraiment la cinquième puissance de la racine correspondante.

Pour trouver la cinquième puissance de 2, 4, le quarré de 2, indique qu'il faut prendre les 4 termes suivans, 1, 3, 5, 7. La sommation de ces 4 termes, dont chacun doit être pris autant de fois que la racine 2 contient d'unités, se fait en multipliant 16, le double de 8, cube de 2, qui égale la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 2, la moitié du quarré 4, laquelle est aussi la moitié de leur nombre, pour avoir 32, la cinquième puissance de 2.

Pour trouver la cinquième puissance de 3, 9, le quarré de 3, indique qu'il faut prendre les 9 termes suivans, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17. La sommation de ces 9 termes, dont chacun doit être pris autant de fois que la racine 3 contient d'unités, se fait en multipliant 54, le double de

, cube de 3, lequel double égale la somme des premier dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 4 $\frac{1}{2}$, moitié du quarré 9, laquelle est aussi la moitié de leur ombre, pour avoir 243, la cinquième puissance de 3.

Ces principes, qui servent à former toutes les cinquièmes uissances, servent aussi à extraire la racine cinquième d'un ombre quelconque, qu'on aura auparavant partagé par anches de cinq chiffres en cinq chiffres, en sorte que chaue tranche doit avoir nécessairement cinq chiffres, excepté tranche le plus à gauche, qui peut en avoir une moindre uantité.

Quatrièmement, les cubes 1, 8, 27, 64, etc., indiquent haque nombre des termes qu'on doit additionner pour forner chaque sixième puissance. 8, cube de 2, indique qu'il aut additionner les 8 termes suivans, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 3, 15, pour avoir la somme 64, qui est effectivement la ixième puissance de 2.

Lorsque les cubes indiquent un grand nombre de termes à additionner, alors il faut employer la multiplication, qui est une addition abrégée, et qui consiste à multiplier le double du cube de la racine correspondante, lequel égale la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par la moitié du même cube, laquelle exprime la moitié de leur nombre, pour avoir la sixième puissance de la racine correspondante.

Pour avoir la sixième puissance de 3, 27, cube de 3, indique qu'il faut sommer 27 termes; cette sommation consiste à multiplier 54, le double de 27, cube de 3, lequel double égale la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 13 $\frac{1}{2}$, la moitié du cube 27, laquelle exprime la moitié de leur nombre, afin d'avoir 729, la sixième puissance de 3.

Pour avoir la sixième puissance de 4, 64, cube de 4, indique qu'il faut sommer 64 termes; cette sommation consiste à multiplier 128, le double de 64, cube de 4, lequel double

égale la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 32, la moitié du cube 64, laquelle exprime la moitié de leur nombre, afin d'avoir 4096, la sixième puissance de 4.

Pour avoir la sixième puissance de 5, 125, cube de 5, indique qu'il faut sommer 125 termes; cette sommation consiste à multiplier 250, le double de 125, cube de 5, lequel double égale la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 62 $\frac{1}{2}$, la moitié du cube 125, laquelle exprime la moitié de leur nombre, afin d'avoir 15625, la sixième puissance de 5.

Ces principes, qui servent à former toutes les sixièmes puissances, servent aussi à extraire la racine sixième d'un nombre quelconque, qu'on aura auparavant partagé par tranches de six chiffres en six chiffres, en sorte que chaque tranche doit avoir nécessairement six chiffres, excepté la tranche le plus à gauche, qui peut en avoir une moindre quantité.

Cinquièmement, les cubes 1, 8, 27, 64, etc., indiquent chaque nombre des termes de la progression génératrice des quarrés qu'on doit additionner pour former chaque septième puissance, en observant que chacun des termes de cette série doit être multiplié par la racine correspondante. La sommation de ces termes, ainsi augmentés, se fait en multipliant le double de chaque quatrième puissance correspondante, lequel double égale la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par la moitié du cube correspondant, laquelle exprime la moitié de leur nombre, pour avoir la septième puissance de la racine correspondante.

8, cube de 2, indique qu'il faut additionner les 8 termes suivans, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, qu'on aura multipliés chacun par la racine 2. La sommation des 8 termes 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, ainsi augmentés, se fait en multipliant 32, le double de 16, la quatrième puissance de 2, lequel double égale la somme des premier et dernier termes des 8

qui sont à calculer, par 4, moitié de 8, cube de 2, laquelle est aussi la moitié de leur nombre, pour avoir 128, la septième puissance de 2.

Pour trouver la septième puissance de 3, il suffit de multiplier 162, le double de 81, la quatrième puissance de 3, lequel double égale la somme des premier et dernier termes des 27 qui sont à calculer, et dont chacun a été pris autant de fois que la racine 3 a d'unités, par 13 $\frac{1}{2}$, qui exprime la moitié de leur nombre, pour avoir 2187, la septième puissance de 3.

Pour trouver la septième puissance de 4, il suffit de multiplier 512, le double de 256, la quatrième puissance de 4, lequel double égale la somme des premier et dernier termes des 64, cube de 4, qui indique tous ceux qui sont à calculer, et dont chacun a été pris autant de fois que la racine 4 a d'unités, par 32, la moitié de 64, laquelle exprime la moitié de leur nombre, pour avoir 16384, la septième puissance de 4.

Ces principes, qui servent à former toutes les septièmes puissances, servent aussi à extraire la racine septième d'un nombre quelconque, qu'on aura auparavant partagé par tranches de sept chiffres en sept chiffres, en sorte que chaque tranche doit avoir nécessairement sept chiffres, excepté la tranche le plus à gauche, qui peut en avoir une moindre quantité.

Sixièmement, la quatrième puissance de chaque racine désigne le nombre des termes qu'on doit sommer pour former la huitième puissance de chacune d'elles. Leur sommation consiste à multiplier le double de chaque quatrième puissance correspondante, lequel double égale la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par la moitié de chacune de ces mêmes quatrièmes puissances, afin d'avoir la huitième puissance de la racine correspondante.

Afin d'obtenir la huitième puissance de la racine 2, 16, la

quatrième puissance de 2, indique qu'il faut sommer 16 termes de la progression génératrice des carrés. Cette sommation se fait en multipliant 32, le double de 16, la quatrième puissance de 2, lequel double égale la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 8, la moitié de 16, la quatrième puissance de 2, laquelle exprime la moitié de leur nombre, pour avoir 256, la huitième puissance de 2.

Pour trouver la huitième puissance de 3, il faut multiplier 162, le double de 81, la quatrième puissance de 3, lequel double égale la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 40 $\frac{1}{2}$, la moitié de 81, laquelle exprime la moitié de leur nombre, pour avoir 6561, la huitième puissance de 3.

Pour trouver la huitième puissance de 4, il faut multiplier 512, le double de 256, la quatrième puissance de 4, lequel double égale la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 128, la moitié de 256, laquelle exprime la moitié de leur nombre, pour avoir 65536, la huitième puissance de 4.

Pour trouver la huitième puissance de 5, il faut multiplier 1250, le double de 625, la quatrième puissance de 5, lequel double égale la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 312 $\frac{1}{2}$, la moitié de 625, la quatrième puissance, laquelle exprime la moitié de leur nombre, pour avoir 390625, la huitième puissance de 5.

Ces principes, qui servent à former les huitièmes puissances, servent aussi à extraire la racine huitième d'un nombre quelconque, qu'on aura auparavant partagé par tranches de huit chiffres en huit chiffres, en sorte que chaque tranche doit avoir nécessairement huit chiffres, excepté la tranche le plus à gauche, qui peut en avoir une moindre quantité.

Septièmement, la formation de la neuvième puissance, qui résulte de la progression génératrice des carrés, con-

siste à savoir, 1°. que la quatrième puissance de chaque racine indique justement chaque nombre des termes de cette série qu'on doit nécessairement prendre; 2°. que chaque terme de chaque nombre doit être multiplié par la racine correspondante; 3°. que la sommation de chaque nombre de ces mêmes termes, ainsi augmentés, doit être faite en multipliant la somme des premier et dernier termes de chacun, laquelle égale toujours le double de chaque cinquième puissance correspondante, par la moitié de la quatrième puissance indicative.

Afin d'obtenir la neuvième puissance de 2, 16, la quatrième puissance de 2, indique qu'il faut sommer 16 termes, dont chacun a été multiplié par la racine 2. La sommation de ces 16 termes, ainsi augmentés, se fait en multipliant 64, le double de 32, la cinquième puissance de 2, lequel double égale la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 8, la moitié de 16, la quatrième puissance de 2, laquelle exprime la moitié de leur nombre, pour avoir 512, la neuvième puissance de 2.

Afin d'obtenir la neuvième puissance de 3, il faut multiplier 486, le double de 243, la cinquième puissance de 3, lequel double égale la somme des premier et dernier termes des 81 qui sont à calculer, et dont chacun a été pris autant de fois que la racine 3 a d'unités, par 40 $\frac{1}{2}$, la moitié de 81, laquelle exprime la moitié de leur nombre, pour avoir 19683, la neuvième puissance de 3.

Afin d'obtenir la neuvième puissance de 4, il faut multiplier 2048, le double de 1024, la cinquième puissance de 4, lequel double égale la somme des premier et dernier termes des 256 qui sont à calculer, et dont chacun a été pris autant de fois que la racine 4 a d'unités, par 128, la moitié de 256, laquelle exprime la moitié de leur nombre, pour avoir 262144, la neuvième puissance de 4.

Ces principes, qui servent à former les neuvièmes puissances, servent aussi à extraire la racine neuvième d'un

nombre quelconque, qu'on aura auparavant partagé par tranches de neuf chiffres en neuf chiffres, en sorte que chaque tranche doit avoir nécessairement neuf chiffres, excepté la tranche le plus à gauche, qui peut en avoir une moindre quantité.

Juste application des règles précédentes sur d'autres puissances postérieures et sur l'extraction de leurs racines.

La méthode qui nous a servi à former chacune des quatrièmes, cinquièmes, sixièmes, septièmes, huitièmes et neuvièmes puissances, et à extraire leurs racines, peut également servir à former les puissances postérieures et à extraire leurs racines; elle est simple, puisqu'il faut principalement connaître chaque puissance indicative de chaque nombre des termes de la progression génératrice des quarrés qu'on doit nécessairement sommer pour la formation de la puissance d'un degré pair et pour celle d'un degré impair qui la suit immédiatement, et puisque l'exposant de la puissance indicative, servant tant pour celle d'un degré pair que pour celle d'un degré impair, est réellement la moitié de l'exposant de la puissance d'un degré pair qu'on veut former. Les règles faciles que nous avons enseignées afin de calculer chaque nombre indiqué pour l'obtention de chaque puissance d'un degré pair et de chaque puissance d'un degré impair, diffèrent seulement en ce que la sommation des termes de la série pour l'obtention de la puissance d'un degré pair se fait en multipliant le double de la puissance indicative qui correspond à la racine par la moitié de la même puissance, afin d'avoir la puissance d'un degré pair dont l'exposant est double, laquelle puissance correspond aussi à la même racine, et en ce que la sommation des termes de la série, dont chacun a été multiplié par la racine pour l'obtention de la puissance d'un degré impair, se fait en multipliant le double

de la puissance qui suit immédiatement la puissance indicative par la moitié de la même puissance indicative, afin d'avoir la puissance d'un degré impair.

Comme les règles pour la formation des puissances et l'extraction de leurs racines sont absolument les mêmes, l'application que nous en avons déjà faite, et que nous en allons faire, constatera cette vérité.

Ainsi, pour trouver la dixième puissance de la racine 2, 1°. nous cherchons la cinquième puissance de 2, qui est 32, laquelle indique qu'il faut calculer 32 termes de la progression génératrice des quarrés pour avoir la dixième puissance de 2; 2°. nous prenons 64, le double de 32, la cinquième puissance de 2, lequel double égale la somme des premier et dernier termes des 32 qui sont à calculer; 3°. nous multiplions 64, la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 16, la moitié de 32, la cinquième puissance de 2, laquelle exprime la moitié de leur nombre, afin d'avoir 1024, la dixième puissance de 2.

Pour trouver la dixième puissance de la racine 3, 1°. nous cherchons la cinquième puissance de 3, qui est 243, laquelle indique qu'il faut calculer 243 termes de la progression génératrice des quarrés pour avoir la dixième puissance de 2; 2°. nous prenons 486, le double de 243, la cinquième puissance de 3, lequel double égale la somme des premier et dernier termes des 243 qui sont à calculer; 3°. nous multiplions 486, la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 121 $\frac{1}{2}$, la moitié de 243, la cinquième puissance de 3, laquelle exprime la moitié de leur nombre, afin d'avoir 59049, la dixième puissance de 3.

Pour trouver la dixième puissance de la racine 24, 1°. nous cherchons la cinquième puissance de 24, qui est 7962624, laquelle indique qu'il faut calculer 7962624 termes de la progression génératrice des quarrés pour avoir la dixième puissance de 24; 2°. nous prenons 15925248, le double de 7962624, la cinquième puissance de 24, lequel double égale

la somme des premier et dernier termes des 7962624 qui sont à calculer; 3°. nous multiplions 15925248, la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 3981312, la moitié de 7962624, la cinquième puissance de 24, laquelle exprime la moitié de leur nombre, afin d'avoir 6340338096653 76, la dixième puissance de 24.

Pour faire comprendre combien les règles tant pour la formation des puissances que pour l'extraction de leurs racines sont corrélatives, je vais extraire la racine dixième du même nombre 6340338096653 76, la dixième puissance de la racine 24.

Mais avant de commencer l'extraction de la racine de cette puissance, il est utile de savoir, 1°. que tout nombre exprimé par dix chiffres qui ont la plus grande valeur numérique, comme 9999999999, a pour racine de la dixième puissance le seul chiffre 9; que tout nombre exprimé par onze chiffres qui ont la plus petite valeur numérique, comme 10000000000, a pour racine de la dixième puissance les deux chiffres 10; 2°. que tout nombre dont on cherche la racine dixième doit être partagé par tranches de dix chiffres en dix chiffres, excepté la tranche le plus à gauche, qui peut en avoir une moindre quantité; 3°. que la racine doit avoir autant de chiffres que le nombre a de tranches; 4°. qu'on doit commencer l'opération sur la tranche le plus à gauche, la continuer sur les deux premières tranches, et enfin la terminer sur le nombre entier.

Ainsi, le nombre 6340, 338096653 76, partagé en deux tranches, nous montre que la racine aura deux chiffres qui exprimeront des dixaines et des unités.

Nous cherchons la racine dixième de 6340, la tranche le plus à gauche, et nous trouvons 2, la racine de 1024, la dixième puissance la plus grande contenue dans 6340, la première tranche, puisque 59049, la dixième puissance de 3, la dépasse.

Nous cherchons la racine dixième de 6340338096653 76,

le nombre entier. Pour la trouver, 1°. nous mettons à la suite de la racine 2 un zéro, et à la suite de sa dixième puissance dix zéros, en sorte que 20 est la racine dixième de 10240000000000; 2°, comme cette dixième puissance n'est pas la plus grande du nombre entier, ainsi que celles de 21, 22, 23, que nous avons successivement formées et vérifiées, nous allons chercher celle de 24; 3°, nous trouvons cette dixième puissance en élevant 24 à sa cinquième puissance 7962624, laquelle désigne qu'il faut sommer.... 7962624 termes de la progression génératrice des quarrés pour former la dixième puissance de 24; en prenant.... 15925248, le double de 7962624, la cinquième puissance de 24, lequel double exprime la somme des premier et dernier termes des 7962624 qui sont à calculer; en multipliant 15925248, la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par 3981312, la moitié de la cinquième puissance 7962624, qui est aussi la moitié de leur nombre, pour avoir 63403380965376, la dixième puissance de 24.

Pour trouver la onzième puissance de la racine 24, 1°, nous avons 7962624, la cinquième puissance de 24, laquelle indique qu'il faut calculer 7962624 termes de la progression génératrice des quarrés, dont chacun doit être multiplié par la racine 24; 2°. nous prenons 38220592, le double de 19110296, la sixième puissance de 24, lequel double égale la somme des premier et dernier termes des 7962624 qui ont été ainsi augmentés; nous prenons 3981312, la moitié de 7962624, qui est aussi la moitié du nombre des termes à calculer; 3°. nous multiplions 38220592, la somme des premier et dernier termes des 7962624, dont chacun a été multiplié par la racine 24, par 3981312, la moitié de 7962624, laquelle est aussi la moitié de leur nombre, pour avoir 1521681143169024, la onzième puissance de 24.

Afin de bien concevoir combien les règles tant pour la

formation des puissances que pour l'extraction de leurs racines sont identiques, nous allons extraire la racine onzième du même nombre 1521681143169024; mais avant d'entreprendre l'extraction de cette puissance, il est important de savoir, 1°. que tout nombre exprimé par onze chiffres qui ont la plus grande valeur numérique, comme 99999999999, a pour racine de la onzième puissance le seul chiffre 9; que tout nombre exprimé par douze chiffres qui ont la plus petite valeur numérique, comme 100000000000, a pour racine de la onzième puissance les deux chiffres 10; 2°. que tout nombre dont on cherche la racine onzième doit être partagé par tranches de onze chiffres en onze chiffres, excepté la tranche le plus à gauche, qui peut en avoir une moindre quantité; 3°. que la racine doit avoir autant de chiffres que le nombre à extraire a de tranches; 4°. qu'on doit commencer l'opération sur la tranche le plus à gauche.

Ainsi, le nombre 15216, 81143169024, partagé en deux tranches, aura à la racine onzième deux chiffres qui exprimeront des dixaines et des unités.

Nous cherchons la racine onzième de 15216, la tranche le plus à gauche, et nous trouvons 2, la racine de 2048, la onzième puissance la plus grande contenue dans 15216, la première tranche, puisque 177147, la onzième puissance de 3, la dépasse.

Ensuite, nous cherchons la racine onzième de..... 1521681143169024, le nombre entier. Pour la trouver, 1°. nous mettons à la suite de la racine 2 un zéro, et à la suite de sa onzième puissance 2048 onze zéros, en sorte que 20 est la racine onzième de 2048000000000; 2°. comme cette onzième puissance n'est pas la plus grande contenue dans le nombre entier, ainsi que celles de 21, 22, 23, que nous avons successivement formées et vérifiées, nous allons chercher celle de 24; 3°. pour la trouver, nous élevons 24 à sa cinquième puissance 7962624, laquelle désigne qu'il faut

nmer 7962624 termes de la progression génératrice des arrés, dont chacun doit être multiplié par la racine 24, our avoir la onzième puissance de 24; 4°. nous prenons 3220595 2, le double de 191102976, la sixième puissance e 24, lequel double égale la somme des premier et dernier rmes des 7962624 qui ont été ainsi augmentés; nous pre- ons 3981312, la moitié de 7962624, laquelle est aussi la oitié de leur nombre; 5°. nous multiplions 38220595 2, le ouble de 191102976, la sixième puissance de 24, lequel ouble égale la somme des premier et dernier termes des 962624 qui sont à calculer, et dont chacun a été pris au- ant de fois que la racine 24 a d'unités, par 3981312, la oitié de 7962624, laquelle est aussi la moitié de leur ombre, pour avoir 1521681143169024, la onzième puis- ance de 24.

Dans la sommation des termes de la progression généra- rice des quarrés pour former les puissances des degrés airs et impairs, et pour extraire leurs racines, il est évi- ent que l'exposant de chaque puissance d'un degré pair u'on cherche pour connaître sa vraie racine est partagé en eux exposans égaux, dont l'un des deux indique la puis- ance qui nous fait connaître le nombre des termes de cette série nécessaire pour sa formation, et dont le double de cette puissance indicative, qui égale la somme des premier et der- nier termes du nombre de ceux qui doivent être calculés, sera multiplié par la moitié de cette même puissance, la- quelle est précisément la moitié de leur nombre, pour avoir la puissance cherchée d'un degré pair. L'exposant de chaque puissance d'un degré impair est partagé en deux exposans inégaux, dont le premier indique la même puissance que la précédente, et par conséquent le même nombre des termes de cette série qu'on doit calculer, et dont chacun doit être multiplié par la racine correspondante; le second indique la puissance suivante et correspondante à la même racine, dont le double de cette dernière puissance égale la somme des

premier et dernier termes du nombre de ceux qui doivent être calculés, et qui ont été ainsi augmentés, lequel double doit être multiplié par la moitié de la puissance indicative, laquelle est aussi la moitié de leur nombre à calculer, pour produire la puissance cherchée d'un degré impair.

En général, nous observons que tout nombre dont on cherche la racine désignée par l'exposant de la puissance doit être partagé par tranches, dont chacune aura autant de chiffres que l'exposant de la même puissance a d'unités, excepté la tranche le plus à gauche, qui peut en avoir une moindre quantité.

La facilité avec laquelle on peut employer cette méthode, qui nous apprend à connaître les règles pour la formation des puissances et l'extraction de leurs racines, nous fait concevoir la possibilité de former de grandes puissances et d'extraire leurs racines. C'est un enchaînement de principes lumineux qui se succèdent les uns aux autres, et qui semblent nous conduire à l'infini.

Le tableau général des puissances résultantes de la progression génératrice des quarrés 1, 3, 5, 7, etc., etc., dont les termes ont été calculés d'après des règles appropriées à chaque puissance, fera brièvement concevoir la manière aisée de leur formation.

TABLEAU GÉNÉRAL

puissances résultantes de la progression génératrice les quarrés 1, 3, 5, 7, etc., etc., *dont les termes ont été calculés d'après les règles appropriées à chaque puissance.*

RACINES.	QUARRÉS.		CUBES.			
Les nombres naturels 1, 2, 3, 4, etc., qui sont identiquement les racines et les termes de la 1re puissance, sont aussi les racines de toutes les autres puissances,	L'addition successive des termes de la série primitive 1, 3, 5, etc., forme tous les quarrés. L'addition des termes successifs de la série.	Quarrés.	Les termes de la série primitive 1, 3, 5, etc., correspondans aux cinq premières racines, sont exprimés pour montrer que chaque nombre successif de ces termes croît comme chaque racine correspondante croît en unités. Chaque somme des prem. et dern. termes pour chaque nombre, égale le double de chaque quarré correspondant.		Somm.	Chaque somme des premier et dern. terme multipliée par la moitié de la racine correspondante, produit le cube de cette même racine. Cubes.
1	.....	1	1			1
2	1 plus 3 =	4	3, 5		8	8
3	4 plus 5 =	9	7, 9, 11		18	27
4	9 plus 7 =	16	13, 15, 17, 19		32	64
			Prem. termes.	Dern. termes.		
5	16 plus 9 =	25	21	29	50	125
6	25 plus 11 =	36	31	41	72	216
7	36 plus 13 =	49	43	55	98	343
8	49 plus 15 =	64	57	71	128	512
9	64 plus 17 =	81	73	89	162	729
10	81 plus 19 =	100	91	109	200	1000

Suite du tableau général.

RACIN.	4es PUISSANCES.			5es PUISSANCES.		
Racines.	Chaque quarré correspondant à chaque racine indique le nombre des termes de la série primitive à calculer. Le double de chaque quarré, qui égale la somme des premier et dernier termes de chaque nombre, multiplié par la moitié de chaque quarré, produit la quatrième puissance de chaque racine.			Le quarré correspondant à chaque racine indique le nombre des termes de la série primitive à calculer, dont chacun a été pris autant de fois que la racine a d'unités, pour former chaque cinquième puissance. Le double de chaque cube correspondant à chaque racine, lequel double égalant la somme des premier et dernier termes de ceux qui ont été ainsi augmentés, et étant multiplié par la moitié de chaque quarré indicatif, produit chaque cinquième puissance.		
	Quarrés doublés.	Quarrés $\frac{1}{2}$.	4es puissan.	Cubes doublés.	Quarrés $\frac{1}{2}$.	5es puissan.
1	.....	.....	1	.....	.....	1
2	8	2	16	16	2	32
3	18	4 $\frac{1}{2}$	81	54	4 $\frac{1}{2}$	243
4	32	8	256	128	8	1024
5	50	12 $\frac{1}{2}$	625	250	12 $\frac{1}{2}$	3125
6	72	18	1296	432	18	7776
7	98	24 $\frac{1}{2}$	2401	686	24 $\frac{1}{2}$	16807
8	128	32	4096	1024	32	32768
9	162	40 $\frac{1}{2}$	6561	1458	40 $\frac{1}{2}$	59049
10	200	50	10000	2000	50	100000

Suite du tableau général.

RACIN.	6es PUISSANCES.			7es PUISSANCES.		
Racin.	Le cube de chaque racine correspondante indique le nombre des termes de la série primitive à calculer pour former chaque sixième puissance. Le double de chaque cube, qui égale la somme des premier et dernier termes de chaque nombre, multiplié par la moitié de chacun des mêmes cubes, produit chaque sixième puissance.			Le cube de chaque racine correspondante indique le nombre des termes de la série primitive à calculer, dont chacun a été pris autant de fois que la racine a d'unités, pour former chaque septième puissance. Le double de la quatrième puissance correspondante, qui égale la somme des premier et dernier termes du nombre de ceux qui ont été ainsi augmentés, multiplié par la moitié du cube indicatif, produit chaque septième puissance.		
	Cubes doublés.	Cubes $\frac{1}{2}$.	6es puissanc.	4es puis. doublées	Cubes $\frac{1}{2}$.	7es puissances.
1	.....	.....	1	.....	.....	1
2	16	4	64	32	4	128
3	54	13 $\frac{1}{2}$	729	162	13 $\frac{1}{2}$	2187
4	128	32	4096	512	32	16384
5	250	62 $\frac{1}{2}$	15625	1250	62 $\frac{1}{2}$	78125
6	432	108	46656	2592	108	279936
7	686	171 $\frac{1}{2}$	117649	4802	171 $\frac{1}{2}$	823543
8	1024	256	262144	8192	256	2097152
9	1458	364 $\frac{1}{2}$	531441	13122	364 $\frac{1}{2}$	4782969
10	2000	500	1000000	20000	500	10000000

Suite du tableau général.

RAC.	8es PUISSANCES.			9es PUISSANCES.		
Rac.	La quatrième puissance de chaque racine correspondante indique le nombre des termes de la série primitive à calculer, pour former chaque huitième puissance. Le double de chaque quatrième puissance, qui égale la somme des premier et dernier termes de chaque nombre, multiplié par la moitié de la quatrième puissance indicative, produit chaque huitième puissance.			La quatrième puissance de chaque racine correspondante indique le nombre des termes de la série primitive à calculer, dont chacun a été pris autant de fois que la racine a d'unités, pour former chaque neuvième puissance. Le double de la cinquième puissance correspondante, qui égale la somme des premier et dernier termes de ceux qui ont été ainsi augmentés, multiplié par la moitié de la quatrième puissance indicative, produit chaque neuvième puissance.		
	4es puis. doublées	4es puissances $\frac{1}{2}$.	8es puissanc.	5es puis. doublées	4es puissances $\frac{1}{2}$.	9es puissances
1	.....	.....	1	1	.....	
2	32	8	256	64	8	512
3	162	40 $\frac{1}{2}$	6561	486	40 $\frac{1}{2}$	19683
4	512	128	65536	2048	128	262144
5	1250	312 $\frac{1}{2}$	390625	6250	312 $\frac{1}{2}$	1953125
6	2592	648	1679616	15552	648	10077696
7	4802	1200 $\frac{1}{2}$	5764801	33614	1200 $\frac{1}{2}$	40353600
8	8192	2048	16777216	65536	2048	134217728
9	13122	3280 $\frac{1}{2}$	43046721	118098	3280 $\frac{1}{2}$	387420489
10	20000	5000	100000000	200000	5000	1000000000

Suite du tableau général.

La cinquième puissance de chaque racine correspondante indique le nombre des termes de la série primitive à calculer pour former chaque dixième puissance.

Le double de chaque cinquième puissance, qui égale la somme des premier et dernier termes de chaque nombre, multiplié par la moitié de la cinquième puissance indicative, produit chaque dixième puissance.

Racines.	5es puissances doublées.	5es puissances $\frac{1}{2}$.	10es puissances.
1	.....	.....	1
2	64	16	1024
3	486	121 $\frac{1}{2}$	59049
4	2048	512	1048576
5	6250	1562 $\frac{1}{2}$	9765625
6	15552	3888	60466176
7	33614	8403 $\frac{1}{2}$	282475249
8	65536	16384	1073741824
9	118098	29524 $\frac{1}{2}$	3486784401
10	200000	50000	10000000000

Suite du tableau général.

La cinquième puissance de chaque racine correspondante indique le nombre des termes de la série primitive à calculer, dont chacun a été pris autant de fois que la racine a d'unités, pour former chaque onzième puissance.

Le double de chaque sixième puissance correspondante, qui égale la somme des premier et dernier termes qui ont été ainsi augmentés, multiplié par la moitié de la cinquième puissance indicative, produit chaque onzième puissance.

Racines.	6es puissances doublées.	5es puissances $\frac{1}{2}$.	11es puissances.
1	.....	.....	1
2	128	16	2048
3	1458	121 $\frac{1}{2}$	177147
4	8192	512	4194304
5	31250	1562 $\frac{1}{2}$	48828125
6	93312	3888	362797056
7	235298	8403 $\frac{1}{2}$	1977326743
8	524288	16384	8589934592
9	1062882	29524 $\frac{1}{2}$	31381059609
10	2000000	50000	100000000000

La formation des puissances et l'extraction de leurs racines résultent évidemment de la sommation, appropriée à chacune d'elles, des termes de la progression génératrice des quarrés 1, 3, 5, 7, etc., etc. Tout ce que nous avons dit jusqu'à présent prouve suffisamment que cette série primitive est une source féconde pour leur génération, comme pour l'extraction de leurs racines.

L'une et l'autre, dont les principes sont uniformes au sujet de chaque puissance d'un degré pair, se réduisent à partager l'exposant de la puissance supérieure d'un degré pair en deux parts égales, dont l'une des deux désigne la puissance inférieure correspondante à la racine cherchée, laquelle puissance inférieure indique le nombre des termes qu'on doit calculer pour former la puissance supérieure, et dont on trouve aisément le résultat en multipliant le double de la puissance indicative, lequel égale la somme des premier et dernier termes de ceux qui sont à calculer, par la moitié de cette même puissance indicative.

Les principes sont également uniformes tant pour la formation des puissances que pour l'extraction de leurs racines, au sujet de chaque puissance d'un degré impair, et se réduisent à partager l'exposant de la puissance supérieure d'un degré impair en deux parts inégales et seulement différentes d'une unité. La plus petite part désigne l'exposant de la puissance qui indique le nombre des termes à calculer, dont chacun doit être pris autant de fois que la racine a d'unités, pour former la puissance supérieure d'un degré impair correspondante à la racine cherchée. La sommation de ces termes, ainsi augmentés, se fait en multipliant le double de la puissance suivante désignée par l'exposant le plus grand des deux et correspondante à la même racine, lequel double égale la somme des premier et dernier termes du nombre de ceux qu'on s'est proposé de calculer, par la moitié de la puissance indicative, laquelle fait connaître la moitié de leur nombre.

Réflexion sur le calcul numérique.

Le calcul numérique, composé de dix chiffres dont chacun, excepté le zéro, a une valeur particulière très expressive, est une lumière directe qui, en éclairant notre esprit et notre

entendement, nous fait découvrir des méthodes simples, faciles et utiles dans les sciences mathématiques. Nous observons, en général, qu'un ou plusieurs chiffres qui ont un zéro placé à leur droite acquièrent une valeur décuple. Le calcul numérique, émanant d'une source naturelle, peut être varié de tant de manières, qu'il est présumable qu'on peut trouver parmi ces innombrables variations, presque toutes les méthodes, parfaitement convenables et lumineuses pour éclaircir les difficultés qui se présentent dans les diverses parties des Mathématiques, et pour trouver aisément leurs solutions. Ainsi, la recherche et la découverte des principes primitifs et originaux qui résulteraient du calcul numérique tendraient nécessairement à faire éliminer tous ces signes empruntés, par eux-mêmes insignifians, peu propres à bien résoudre les difficultés qui se présentent dans les sciences exactes, n'ayant qu'une valeur supposée, qu'il faut traduire en chiffres pour comprendre leur signification. Cette traduction, que nécessitent absolument ces signes étrangers, inintelligibles par eux-mêmes, fait facilement comprendre combien le calcul numérique, dérivant d'une source primordiale, est préférable à tous autres, pour la conception facile et prompte des matières abstraites, puisqu'il nous fait découvrir naturellement, et comprendre sans beaucoup d'application d'esprit, des règles d'où découle une multiplicité de connaissances utiles dans diverses sciences.

En effet, quand on se sert, pour la solution des difficultés mathématiques, de signes qui n'ont qu'une valeur supposée, il nous paraît qu'on suit des routes ténébreuses qui nous conduisent d'obscurité en obscurité à des résultats très pénibles à concevoir.

Au contraire, quand on se sert, pour la solution des difficultés mathématiques, du calcul numérique, où la valeur des chiffres est généralement connue, et quand on est assez heureux pour découvrir l'origine primordiale du calcul numérique, il nous paraît que cette découverte nous fait trouver

des règles aisées et des principes lumineux, qui nous conduisent à des vérités palpables.

En effet, il nous paraît évident qu'un calcul qui dériverait de signes n'ayant aucune valeur positive, ne serait pas comparable à un calcul dont les signes sont très expressifs, très significatifs et généralement connus. Le premier nous semble plus obscur que le second, puisqu'il devient impossible, par le premier, d'extraire les racines des puissances, tandis qu'il est possible, par le second, de les extraire. Au reste, il faut se faire comprendre à l'intelligence la plus commune. La plus grande simplicité et facilité deviennent par cela même la perfection du calcul.

De la multiplication.

Changer la multiplication en addition et en soustraction, pour trouver le produit du multiplicande par le multiplicateur, c'est-à-dire prendre la moitié de la somme du multiplicande et du multiplicateur, et la moitié de leur différence; ôter le quarré de la moitié de leur différence, du quarré de la moitié de leur somme, pour avoir le produit de ces deux facteurs.

La multiplication, qui est une addition abrégée, nous fait prendre le nombre multiplicande autant de fois que le nombre multiplicateur contient d'unités, pour en avoir le produit. Le résultat obtenu de cette manière est aussi sûr qu'expéditif, si l'on peut parvenir à transformer la multiplication en addition et en soustraction, c'est-à-dire à se servir de l'addition et de la soustraction pour produire un calcul aussi bien fait et bien plus prompt que celui de la multiplication; alors on aura beaucoup simplifié cette opération, et l'on aura rendu un service important.

La nouvelle méthode de multiplier un nombre par un autre en employant seulement les simples règles d'addition et de soustraction, consiste: 1°. à additionner le multiplicande et le multiplicateur, et à prendre la moitié de cette somme;

2°. à soustraire le multiplicateur du multiplicande, et à prendre la moitié de la différence; 3°. à chercher le quarré de la moitié de la somme, et le quarré de la moitié de la différence; 4°. à ôter du premier quarré le second, pour avoir un reste, qui est exactement le produit du multiplicande par le multiplicateur.

La formation des quarrés des nombres naturels est d'autant plus simple et facile, qu'elle s'opère en additionnant successivement les termes de la progression génératrice des quarrés 1, 3, 5, 7, etc., etc., et peut être ainsi continuée jusqu'aux plus grands nombres. Lorsqu'on connaîtra les quarrés des plus grands nombres, on trouvera aisément les produits des multiplicandes par les multiplicateurs, puisqu'il suffira de soustraire, à chaque opération, le quarré de la moitié de la différence du multiplicande et du multiplicateur, du quarré de la moitié de la somme de ces deux facteurs.

Nous allons opérer sur quelques nombres, afin de résoudre les difficultés qui pourraient s'y rencontrer. Nous désirons que leurs solutions facilitent tous ces calculs.

En général, nous observons que chaque terme de la série qui augmente de deux en deux unités, lorsque chaque racine augmente d'unité en unité, égale le quarré de chaque unité, puisqu'il concourt à former successivement chaque quarré des racines ainsi croissantes.

Nous observons aussi que, lorsque le quarré de la moitié de la somme est suivi d'une fraction, alors le numérateur de la fraction égale la somme du multiplicande et du multiplicateur, laquelle est précisément le terme de la série, et le dénominateur égale toujours 2, lorsque la différence qui existe entre le multiplicande et le multiplicateur est 1; sa moitié est $\frac{1}{2}$, et son quarré est $\frac{1}{4}$, par la raison que 1, tout-à-la-fois le quarré de 1 et le premier terme de la série, est le numérateur de la fraction, et que 2 est son dénominateur.

I. Nous cherchons le produit du multiplicande 3 par le

multiplicateur 2, en suivant les règles que nous avons établies. 1°. La somme de ces deux facteurs est 5; leur moitié est $2\frac{1}{2}$, qui a pour quarré $4\frac{5}{4}$, qui se compose de 4, quarré de 2, et de la fraction $\frac{5}{4}$, laquelle a pour numérateur 5, la somme du multiplicande et du multiplicateur, et pour dénominateur 2, ou, ce qui signifie la même chose, la moitié de la somme des deux facteurs, laquelle égale la moitié du terme de la série; 2°. leur différence est 1; sa moitié est $\frac{1}{2}$, qui a pour quarré $\frac{1}{4}$; 3°. $\frac{1}{2}$, quarré de la moitié de la différence $\frac{1}{2}$, étant ôté de $4\frac{5}{4}$, le quarré de la moitié de la somme, il reste $4\frac{4}{4}$, qui égale 6, le produit de 3 multiplié par 2.

II. Nous cherchons le produit du multiplicande 4 par le multiplicateur 2, d'après nos règles. 1°. La somme de ces deux facteurs est 6; leur moitié est 3, qui a pour quarré 9; 2°. leur différence est 2; sa moitié est 1, qui a pour quarré 1; 3°. 1, quarré de 1, la moitié de la différence 2, étant ôté de 9, quarré de 3, il reste 8, le produit de 4 multiplié par 2.

III. Nous cherchons le produit du multiplicande 5 par le multiplicateur 3, d'après nos règles. 1°. La somme de ces deux facteurs est 8; leur moitié est 4, qui a pour quarré 16; 2°. leur différence est 2; sa moitié est 1, qui a pour quarré 1; 3°. 1, quarré de 1; la moitié de la différence 2, étant ôté de 16, quarré de 4, il reste 15, qui égale le produit de 5 multiplié par 3.

IV. Nous cherchons le produit du multiplicande 6 par le multiplicateur 3, d'après nos règles. 1°. La somme de ces deux facteurs est 9; leur moitié est $4\frac{1}{2}$, qui a pour quarré $16\frac{9}{4}$, qui se compose de 16, quarré de 4; et de la fraction $\frac{9}{4}$, dont le numérateur égale la somme des deux facteurs, laquelle est précisément le terme de la série, et le dénominateur est 2; 2°. leur différence est 3; sa moitié est $\frac{3}{2}$; nous remarquons que le numérateur de la fraction correspond à 5, le terme de la série; alors nous remplaçons 3 par 5, et nous avons la fraction $\frac{5}{2}$; 3°. $16\frac{9}{4}$ moins $\frac{5}{2}$ égale $16\frac{4}{4}$, égale 18, le produit de 6 multiplié par 3.

V. Nous cherchons le produit du multiplicande 7 par le multiplicateur 4, d'après nos règles. 1°. La somme de ces deux facteurs est 11; leur moitié est $5\frac{1}{2}$, qui a pour quarré $25\frac{11}{2}$, qui se compose de 25, quarré de 5, et de $\frac{11}{2}$, la moitié du terme 11, et le quarré de $\frac{1}{2}$; 2°. leur différence est 3, sa moitié est $\frac{3}{2}$; cette fraction est changée en cette autre $\frac{5}{2}$, par la raison que le numérateur de la fraction égale toujours la racine doublée moins 1; $25\frac{11}{2}$ moins $\frac{5}{2}$ égale $25\frac{6}{2}$ égale 28, le produit de 7 multiplié par 4.

VI. Nous cherchons le produit du multiplicande 8 par le multiplicateur 4, d'après nos règles. 1°. La somme de ces deux facteurs est 12; leur moitié est 6, qui a pour quarré 36; 2°. leur différence est 4; sa moitié est 2, dont le quarré est 4; 3°. 4, quarré de 2, étant ôté de 36, quarré de 6, il reste 32, le produit de 8 multiplié par 4.

VII. Nous cherchons le produit du multiplicande 9 par le multiplicateur 5, d'après nos règles. 1°. La somme de ces deux facteurs est 14; leur moitié est 7, dont le quarré est 49; 2°. leur différence est 4; sa moitié est 2, dont le quarré est 4; 3°. 49, quarré de 7, moitié de la somme, moins 4, quarré de 2, moitié de la différence, égale 45, le produit de 9 multiplié par 5.

VIII. Nous cherchons le produit du multiplicande 10 par le multiplicateur 5, d'après nos règles. 1°. La somme de ces deux facteurs est 15; leur moitié est $7\frac{1}{2}$, dont le quarré est $49\frac{15}{4}$, qui se compose de 49, quarré de 7, et de $\frac{15}{2}$, la moitié du terme 15 et le quarré de $\frac{1}{2}$. Nous rappelons ici que chaque terme de la série croissante de deux en deux unités, quelque grand ou petit qu'il soit, égale le quarré de chaque unité de la racine correspondante. 2°. Leur différence est 5; sa moitié est $2\frac{1}{2}$, qui a pour quarré $4\frac{5}{2}$, qui se compose de 4, quarré de 2, et de $\frac{5}{2}$, la moitié du terme 5 et le quarré de $\frac{1}{2}$; 3°. 49 moins 4 égale 45, $\frac{15}{2}$ moins $\frac{5}{2}$ égale $\frac{10}{2}$ ou 5; 45 et 5 font 50, le produit de 10 multiplié par 5.

IX Nous cherchons le produit du multiplicande 11 par le

multiplicateur 6, d'après nos règles. 1°. La somme de ces deux facteurs est 17; leur moitié est $8\frac{1}{2}$, qui a pour quarré $64\frac{17}{4}$, qui se compose de 64, quarré de 8, et de $\frac{17}{4}$, la moitié du terme 17, et le quarré de $\frac{1}{2}$; 2°. leur différence est 5; sa moitié est $2\frac{1}{2}$, qui a pour quarré $4\frac{5}{4}$, qui se compose de 4, quarré de 2, et de $\frac{5}{4}$, la moitié du terme 5, et le quarré de $\frac{1}{2}$; 3°. 64 moins 4 égale 60, $\frac{17}{2}$ moins $\frac{5}{2}$ égale $\frac{12}{2}$ ou 6; 60 et 6 font 66, le produit de 11 multiplié par 6.

En général, nous observons que la fraction qui suit le quarré de la moitié de la somme des facteurs a pour numérateur la somme des facteurs; que la fraction qui suit le quarré de la moitié de la différence a pour numérateur la différence des facteurs, et que l'une et l'autre fraction ont 2 pour dénominateur.

X. Nous cherchons le produit du multiplicande 12 par le multiplicateur 6, d'après nos règles. 1°. La somme de ces deux facteurs est 18; leur moitié est 9, qui a pour quarré 81; 2°. leur différence est 6; sa moitié est 3, qui a pour quarré 9; 81, quarré de 9, la moitié de la somme des deux facteurs, moins 9, quarré de 3, la moitié de leur différence, égale 72, le produit de 12 multiplié par 6.

Nous avons opéré sur de petits nombres, compris dans ces 10 numéros, afin de nous assurer sans peine que le quarré de la moitié de la somme du multiplicande et du multiplicateur, moins le quarré de la moitié de leur différence, égale le produit de ces facteurs. Puisque nous sommes certain de nos calculs à ce sujet, nous allons appliquer nos règles sur des nombres plus considérables; et pour en faciliter l'application, nous observons derechef que chaque terme de la série qui augmente de deux en deux unités, lorsque les racines augmentent d'unité en unité, égale le quarré de chaque unité; que, d'après cette remarque importante, la fraction qui suit le quarré de la moitié de la somme des facteurs, ayant pour numérateur la somme des facteurs et pour dénominateur 2; que celle qui suit le quarré de la moitié de leur différence,

ayant pour numérateur la différence des facteurs et pour dénominateur 2; que chacune des deux fractions étant précisément la moitié du terme correspondant de la racine, est, par cela même, le quarré de la moitié de chaque unité.

Cette manière de trouver le produit du multiplicande par le multiplicateur paraîtra d'autant plus utile, plus intéressante et plus facile, que ces deux facteurs sont considérables, et qu'on aura formé les quarrés des plus grands nombres qu'on obtient avec beaucoup de facilité en additionnant successivement les termes de la série primitive, et que le produit du multiplicande par le multiplicateur consiste seulement à soustraire du quarré de la moitié de la somme des deux facteurs, le quarré de la moitié de leur différence.

XI. Nous cherchons le produit du multiplicande 78 par le multiplicateur 34, d'après nos règles. 1°. La somme de ces deux facteurs est 112; leur moitié est 56, qui a pour quarré 3136; 2°. leur différence est 44; sa moitié est 22, qui a pour quarré 484; 3°. 3136, le quarré de 56, la moitié de la somme des deux facteurs, moins 484, le quarré de 22, la moitié de leur différence, égale 2652, le produit de 78 multiplié par 34.

XII. Nous cherchons le produit du multiplicande 98 par le multiplicateur 76. 1°. La somme de ces deux facteurs est 174; leur moitié est 87, qui a pour quarré 7569; 2°. leur différence est 22; sa moitié est 11, qui a pour quarré 121; 3°. 7569, quarré de 87, la moitié de la somme des deux facteurs, moins 121, quarré de 11, la moitié de leur différence, égale 7448, le produit de 98 multiplié par 76.

XIII. Nous cherchons le produit du multiplicande 89 par le multiplicateur 64. 1°. La somme de ces deux facteurs est 153; leur moitié est $76\frac{1}{2}$, qui a pour quarré $5776\frac{153}{2}$, qui se compose de 5776, quarré de 76, et de $\frac{153}{2}$, moitié du terme 153, et le quarré de $\frac{1}{2}$; 2°. leur différence est 25, sa moitié est $12\frac{1}{2}$, qui a pour quarré $144\frac{25}{2}$, qui se compose de 144, quarré de 12, et de $\frac{25}{2}$, la moitié du terme 25, et le

quarré de $\frac{1}{2}$; 3°. 5776, quarré de 76, moins 144, quarré de 12, égale 5632, $\frac{153}{2}$ moins $\frac{25}{2}$ égale $\frac{128}{2}$ ou 64; 5632 et 64 font 5696, le produit de 89 multiplié par 64.

XIV. Nous cherchons le produit du multiplicande 284 par le multiplicateur 72. 1°. La somme de ces deux facteurs est 356; leur moitié est 178, qui a pour quarré 31684, quarré de 178; 2°. leur différence est 212, sa moitié est 106, qui a pour quarré 11236; 3°. 31684, quarré de 178, la moitié de la somme des deux facteurs, moins 11236, le quarré de 106, la moitié de leur différence, égale 20448, le produit de 284 multiplié par 72.

XV. Nous cherchons le produit du multiplicande 596 par le multiplicateur 152. 1°. La somme de ces deux facteurs est 748; leur moitié est 374, qui a pour quarré 139876; 2°. leur différence est 444; sa moitié est 222, qui a pour quarré 49284; 3°. 139876, quarré de 374, la moitié de la somme des deux facteurs, moins 49284, quarré de 222, la moitié de leur différence, égale 90592, le produit de 596 multiplié par 152.

XVI. Nous cherchons le produit du multiplicande 699 par le multiplicateur 246. 1°. La somme de ces deux facteurs est 945; leur moitié est $472\frac{1}{2}$, qui a pour quarré $222784\frac{945}{2}$, qui se compose de 222784, quarré de 472, et de $\frac{945}{2}$, la moitié du terme 945, et le quarré de $\frac{1}{2}$; 2°. leur différence est 453; sa moitié est $226\frac{1}{2}$, qui a pour quarré $51076\frac{453}{2}$, qui se compose de 51076, quarré de 226, et de $\frac{453}{2}$, la moitié du terme 453, et le quarré de $\frac{1}{2}$; 3°. 222784, quarré de 472, moins 51076 égale 171708, $\frac{945}{2}$ moins $\frac{453}{2}$ égale $\frac{492}{2}$ ou 246; 171708 et 246 font 171954, le produit de 699 multiplié par 246.

XVII. Nous cherchons le produit du multiplicande 846 par le multiplicateur 372. 1°. La somme de ces deux facteurs est 1218; leur moitié est 609, qui a pour quarré 370881; 2°. leur différence est 474; sa moitié est 237, qui a pour quarré... 56169; 3°. 370881, quarré de 609, la moitié de la somme des deux facteurs, moins 56169, quarré de 237, la moitié

de leur différence, égale 314712, le produit de 846 multiplié par 372.

XVIII. Nous cherchons le produit du multiplicande 357 par le multiplicateur 642. 1°. La somme de ces deux facteurs est 4221 ; leur moitié est $2110\frac{1}{2}$, qui a pour quarré..... $4452100\frac{4221}{4}$, qui se compose de 4452100, quarré de 2110 et de $\frac{4221}{4}$, la moitié du terme 4221, et le quarré de $\frac{1}{2}$. 2°. leur différence est 2937 ; sa moitié est $1468\frac{1}{2}$, qui a pour quarré $2155024\frac{2937}{4}$, qui se compose de 2155024, quarré de 1468, et de $\frac{2937}{4}$, la moitié du terme 2937, et le quarré de $\frac{1}{4}$; 3°. 4452100, quarré de 2110, moins 2155024, quarré de 1468, égale 2297076, $\frac{4221}{4}$ moins $\frac{2937}{4}$ égale $\frac{1284}{4}$ ou 642. 2297076 et 642 font 2297718, le produit de 3579 multiplié par 642.

XIX. Nous cherchons le produit du multiplicande 75931 par le multiplicateur 3579. 1°. La somme de ces deux facteurs est 79510 ; leur moitié est 39755, qui a pour quarré..... 1580460025; 2°. leur différence est 72352 ; sa moitié est 36176, qui a pour quarré 1308702976 ; 3°. 1580460025, quarré de 29755, la moitié de la somme des deux facteurs, moins.... 1308702976, le quarré de 36176, la moitié de leur différence, égale 271757049, le produit de 75931 multiplié par 3579.

XX. Nous cherchons le produit du multiplicande 900001 par le multiplicateur 70023. 1°. La somme de ces deux facteurs est 970024 ; leur moitié est 485012, qui a pour quarré 235236640144; 2°. leur différence est 829978 ; sa moitié est 414989, qui a pour quarré 172215870121; 3°. 235236640144, quarré de 485012, la moitié de la somme des deux facteurs, moins 172215870121, quarré de 414989, la moitié de leur différence, égale 63020770023, le produit de 900001 multiplié par 70023.

TABLEAU

SUR LA NOUVELLE MÉTHODE

se servir de l'addition et de la soustraction pour trouver le produit d'un nombre multiplié par un autre, lequel résulte surtout de la facilité à former les quarrés des nombres naturels, en additionnant successivement les termes de la progression arithmétique 1, 3, 5, 7, etc.

Numér.	Multiplican. Multiplicat.	Somme des 2 fact. Moit. de leur somm. Quarré de leur moit.	Differ. des 2 fact. Moit. de leur differ. Quarré de leur moit.	Le quarré de la moitié de la somme des facteurs, moins le quarré de la moitié de leur différence, égale leur produit.
1	3 2	5 2 1/2 4 1/2	1 1/2 1/2	4 1/2 moins 1/2 égale 4 1/2, ou 6, le produit de 3 multiplié par 2.
2	4 2	6 3 9	2 1 1	9 moins 1 égale 8, le produit de 4 multiplié par 2.
3	5 3	8 4 16	2 1 1	16 moins 1 égale 15, le produit de 5 multiplié par 3.
4	6 3	9 4 1/2 16 9/2	3 3/2 3/2	16 9/2 moins 3/2, égale 16 4/2, ou 18, le produit de 6 multiplié par 3.
5	7 4	11 5 1/2 25 11/2	3 3/2 5/2	25 11/2 moins 5/2 égale 25 6/2, ou 28, le produit de 6 multiplié par 3.
6	8 4	12 6 36	4 2 4	36 moins 4 égale 32, le produit de 8 multiplié par 4.

Numér.	Multiplican. Multiplicat.	Somme des 2 fact. Moit. de leur somm. Quarré de leur moit.	Différ. des 2 fact. Moit. de leur différ. Quarré de leur moit.	Le quarré de la moitié de la somme, moins le quarré de la moitié de leur différence, égale leur produit.
7	9 5	14 7 49	4 2 4	49 moins 4 égale 45, le produit de 9 multiplié par 5.
8	10 5	15 7 1/2 49 15/2	5 2 1/2 4 5/2	49 15/2 moins 4 5/2 égale 45 10/2, ou 50, le produit de 10 multiplié par 5.
9	11 6	17 8 1/2 64 17/2	5 2 1/2 4 5/2	64 17/2 moins 4 5/2 égale 60 12/2, ou 66, le produit de 11 multiplié par 6.
10	12 6	18 9 81	6 3 9	81 moins 9 égale 72, le produit de 12 multiplié par 6.
11	78 34	112 56 3136	44 22 484	2136 moins 484 égale 2652, le produit de 78 multiplié par 34.
12	98 76	174 87 7569	22 11 121	7569 moins 121 égale 7448, le produit de 98 multiplié par 76.
13	89 64	153 76 1/2 5776 153/2	25 12 1/2 144 25/2	5776 153/2 moins 144 25/2 égale 5632 128/2, ou 5696, le produit de 89 multiplié par 64.
14	284 72	356 178 31684	212 106 11236	31684 moins 11236 égale 20448, le produit de 284 multiplié par 72.

Numér.	Multiplican. Multiplicat.	Somme des 2 fact. Moit. de leur somm. Quarré de leur moit.	Différ. des 2 fact. Moit. de leur différ. Quarré de leur moit.	Le quarré de la moitié de la somme, moins le quarré de la moitié de leur différence, égale leur produit.
15	596 152	748 374 139876	444 222 49284	139876 moins 49284 égale 90592, le produit de 596 multiplié par 152.
16	699 246	945 472 1/2 222784 945/2	453 226 1/2 51076 453/2	222784 945/2 moins 51076 453/2 égale 171708 492/2, ou 171954, le produit de 699 multiplié par 246.
17	846 372	1218 609 370881	474 237 56169	370881 moins 56169 égale..... 314712, le produit de 846 multiplié par 372.
18	3579 642	4221 2110 4452100 4221/2	2937 1468 1/2 2155024 2937/2	4452100 4221/2 moins..../..... 2155024 2937/2 égale 2297718, le produit de 3579 multiplié par 642.
19	75931 3579	79510 39755 1580460025	72352 36176 1308702976	1580460025.... moins 1308702976, égale 271757049, le produit de.... 75931 multiplié par 3579.
20	900001 70023	970024 485012 235236640144	829978 414989 172215870121	235236640144.. moins..... 172215870121.... égale..... 63020770023, le produit de 900001 multiplié par.... 70023.

OBSERVATION GÉNÉRALE

Sur la multiplication et la division.

Si l'on veut avoir un aperçu de la multiplication et de la division, il faut examiner les trois chiffres suivans 2, 4, 8, qui sont en progression géométrique. Nous voyons, 1°. que, considérés comme puissances, 2 est la racine du quarré 4 et du cube 8; 2°. que, considérés comme multiplication, 2 est le multiplicateur, 4, le multiplicande, 8, le produit; que, considérés comme division, 2 est le diviseur, 4, le quotient, 8, le dividende. De là il résulte que, 2, le multiplicateur, égale 2, le diviseur; que 4, le multiplicande, égale 4, le quotient; 8, le produit, égale 8, le dividende. Ainsi, le multiplicateur, le multiplicande et le produit ont un rapport exact avec le diviseur, le quotient et le dividende.

Ces diverses considérations doivent nous conduire naturellement à des développemens lumineux; à l'effet de faciliter les règles de la multiplication et de la division, nous allons les traiter séparément.

La seconde méthode de trouver le produit d'un nombre multiplié par un autre consiste à employer les puissances qui se succèdent immédiatement, et qui sont effectivement les multiplicateurs, les multiplicandes et les produits. Ainsi, les trois chiffres 2, 4, 8, qui sont en progression géométrique, et qui, considérés sous le rapport de la multiplication, en donnent une idée exacte, puisque 2 est le multiplicateur, 4 le multiplicande, 8 le produit. Mais afin de nous modeler sur cette considération et d'en faire une juste application:

Nous savons que 9 est la racine du quarré 81 et du cube 729; si nous multiplions 81, le multiplicande, par 9, le multiplicateur, nous aurons nécessairement le produit 729.

Nous savons que 14 est la racine du quarré 196 et du cube 2744; si nous multiplions 196, le multiplicande, par 14, le multiplicateur, nous aurons nécessairement le produit 2744.

Nous savons que 48 est la racine du quarré 2304 et du ıbe 110592; si nous multiplions 2304, le multiplicande, par 3, le multiplicateur, nous aurons nécessairement le pro-ait 110592.

Nous savons que 102 est la racine du quarré 10404 et du ıbe 1061208; si nous multiplions 10404, le multiplicande, ar 102, le multiplicateur, nous aurons nécessairement le roduit 1061208.

Les trois nombres 9, 81, 729, sont en progression géomé-ique, puisque 9 est à 81 comme 81 est à 729. En effet, 729 ıultiplié par 9 égale 81 multiplié par 81, égale 6561, le uarré de 81. Ainsi les quatre nombres 9, 81, 729, 6561, ont en progression géométrique. Cet exemple est applicable tous autres semblables.

Comme il arrive rarement que les racines, les quarrés, oient précisément les multiplicateurs, les multiplicandes, lors les produits ne se trouvent pas ainsi.

Comme aussi il arrive rarement que les racines, les cubes, oient précisément les diviseurs, les dividendes, alors les quo-iens ne se trouvent pas ainsi.

Néanmoins, nous montrerons la manière de nous servir du tableau suivant, composé de six colonnes, tant pour avoir les produits des nombres multipliés par d'autres, que pour obtenir les quotiens des nombres divisés par d'autres.

La première colonne comprend les racines, la seconde colonne comprend la progression génératrice des quarrés, la troisième colonne comprend les quarrés, la quatrième colonne comprend la progression génératrice des cubes, la cinquième colonne comprend la différence des cubes, la sixième comprend les cubes.

TABLEAU

Des quarrés et des cubes, servant à trouver les produits des multiplicandes par les multiplicateurs, et les quotiens des dividendes par les diviseurs.

Racines.	Progres. gén. des quarrés	Quarrés.	Progres. gén. des cubes.	Différences des cubes.	Cubes.
1	1	1	0	1	1
2	3	4	6	7	8
3	5	9	12	19	27
4	7	16	18	37	64
5	9	25	24	61	125
6	11	36	30	91	216
7	13	49	36	127	343
8	15	64	42	169	512
9	17	81	48	217	729
10	19	100	54	271	1000
11	21	121	60	331	1331
12	23	144	66	397	1728
13	25	169	72	469	2197
14	27	196	78	547	2744
15	29	225	84	631	3375
16	31	256	90	721	4096
17	33	289	96	817	4913
18	35	324	102	919	5832
19	37	361	108	1027	6859
20	39	400	114	1141	8000
21	41	441	120	1261	9261
22	43	484	126	1387	10648
23	45	529	132	1519	12167
24	47	576	138	1657	13824
25	49	625	144	1801	15625

Racines.	Progres. gén. des quarrés.	Quarrés.	Progres. gén. des cubes.	Différences des cubes.	Cubes.
26	51	676	150	1951	17576
27	53	729	156	2107	19683
28	55	784	162	2269	21952
29	57	841	168	2437	24389
30	59	900	174	2611	27000
31	61	961	180	2791	29791
32	63	1024	186	2977	32768
33	65	1089	192	3169	35937
34	67	1156	198	3367	39304
35	69	1225	204	3571	42875
36	71	1296	210	3781	46656
37	73	1369	216	3997	50653
38	75	1444	222	4219	54872
39	77	1521	228	4447	59319
40	79	1600	234	4681	64000
41	81	1681	240	4921	68921
42	83	1764	246	5167	74088
43	85	1849	252	5419	79507
44	87	1936	258	5677	85184
45	89	2025	264	5941	91125
46	91	2116	270	6211	97336
47	93	2209	276	6487	103823
48	95	2304	282	6769	110592
49	97	2401	288	7057	117649
50	99	2500	294	7351	125000
51	101	2601	300	7651	132651
52	103	2704	306	7957	140608
53	105	2809	312	8269	148877
54	107	2916	318	8587	157464
55	109	3025	324	8911	166375
56	111	3136	330	9241	175616
57	113	3249	336	9577	185193
58	115	3364	342	9919	195112
59	117	3481	348	10267	205379
60	119	3600	354	10621	216000

Racines.	Progres. gén. des quarrés.	Quarrés.	Progres. gén. des cubes.	Différences des cubes.	Cubes.
61	121	3721	360	10981	226981
62	123	3844	366	11347	238328
63	125	3969	372	11719	250047
64	127	4096	378	12097	262144
65	129	4225	384	12481	274625
66	131	4356	390	12871	287496
67	133	4489	396	13267	300763
68	135	4624	402	13669	314432
69	137	4761	408	14077	328509
70	139	4900	414	14491	343000
71	141	5041	420	14911	357911
72	143	5184	426	15337	373248
73	145	5329	432	15769	389017
74	147	5476	438	16207	405224
75	149	5625	444	16651	421875
76	151	5776	450	17101	438976
77	153	5929	456	17557	456533
78	155	6084	462	18019	474552
79	157	6241	468	18487	493039
80	159	6400	474	18961	512000
81	161	6561	480	19441	531441
82	163	6724	486	19927	551368
83	165	6889	492	20419	571787
84	167	7056	498	20917	592704
85	169	7225	504	21421	614125
86	171	7396	510	21931	636056
87	173	7569	516	22447	658503
88	175	7744	522	22969	681472
89	177	7921	528	23497	704969
90	179	8100	534	24031	729000
91	181	8281	540	24571	753571
92	183	8464	546	25117	778688
93	185	8649	552	25669	804357
94	187	8836	558	26227	830584
95	189	9025	564	26791	857375

Racines.	Progres. gén. des quarrés.	Quarrés.	Progres. gén. des cubes.	Différences des cubes.	Cubes.
96	191	9216	570	27361	884736
97	193	9409	576	27937	912673
98	195	9604	582	28519	941192
99	197	9801	588	29107	970299
100	199	10000	594	29701	1000000
101	201	10201	600	30301	1030301
102	203	10404	606	30907	1061208
103	205	10609	612	31519	1092727
104	207	10816	618	32137	1124864
105	209	11025	624	32761	1157625
106	211	11236	630	33391	1191016
107	213	11449	636	34027	1225043
108	215	11664	642	34669	1259712
109	217	11881	648	35317	1295029
110	219	12100	654	35971	1331000
111	221	12321	660	36631	1367631
112	223	12544	666	37297	1404928
113	225	12769	672	37969	1442897
114	227	12996	678	38647	1481544
115	229	13225	684	39331	1520875
116	231	13456	690	40021	1560896
117	233	13689	696	40717	1601613
118	235	13924	702	41419	1643032
119	237	14161	708	42127	1685159
120	239	14400	714	42841	1728000
121	241	14641	720	43561	1771561
122	243	14884	726	44287	1815848
123	245	15129	732	45019	1860867
124	247	15376	738	45757	1906624
125	249	15625	744	46501	1953125
126	251	15876	750	47251	2000376
127	253	16129	756	48007	2048383
128	255	16384	762	48769	2097152
129	257	16641	768	49537	2146689
130	259	16900	774	50311	2197000

Racines.	Progres. gén. des quarrés.	Quarrés.	Progres. gén. des cubes.	Différences des cubes.	Cubes.
131	261	17161	780	51091	2248091
132	263	17424	786	51877	2299968
133	265	17689	792	52669	2352637
134	267	17956	798	53467	2406104
135	269	18225	804	54271	2460375
136	271	18496	810	55081	2515456
137	273	18769	816	55897	2571353
138	275	19044	822	56719	2628072
139	277	19321	828	57547	2685619
140	279	19600	834	58381	2744000
141	281	19881	840	59221	2803221
142	283	20164	846	60067	2863288
143	285	20449	852	60919	2924207
144	287	20736	858	61777	2985984
145	289	21025	864	62641	3048625
146	291	21316	870	63511	3112136
147	293	21609	876	64387	3176523
148	295	21904	882	65269	3241792
149	297	22201	888	66157	3307949
150	299	22500	894	67051	3375000
151	301	22801	900	67951	3442951
152	303	23104	906	68857	3511808
153	305	23409	912	69769	3581577
154	307	23716	918	70687	3652264
155	309	24025	924	71611	3723875
156	311	24336	930	72541	3796416
157	313	24649	936	73477	3869893
158	315	24964	942	74419	3944312
159	317	25281	948	75367	4019679
160	319	25600	954	76321	4096000
161	321	25921	960	77281	4173281
162	323	26244	966	78247	4251528
163	325	26569	972	79219	4330747
164	327	26896	978	80197	4410944
165	329	27225	984	81181	4492125

Racines.	Progres. gén. des quarrés.	Quarrés.	Progres. gén. des cubes.	Différences des cubes.	Cubes.
166	331	27556	990	82171	4574296
167	333	27889	996	83167	4657463
168	335	28224	1002	84169	4741632
169	337	28561	1008	85177	4826809
170	339	28900	1014	86191	4913000
171	341	29241	1020	87211	5000211
172	343	29584	1026	88237	5088448
173	345	29929	1032	89269	5177717
174	347	30276	1038	90307	5268024
175	349	30625	1044	91351	5359375
176	351	30976	1050	92401	5451776
177	353	31329	1056	93457	5545233
178	355	31684	1062	94519	5639752
179	357	32041	1068	95587	5735339
180	359	32400	1074	96661	5832000
181	361	32761	1080	97741	5929741
182	363	33124	1086	98827	6028568
183	365	33489	1092	99919	6128487
184	367	33856	1098	101017	6229504
185	369	34225	1104	102121	6331625
186	371	34596	1110	103231	6434856
187	373	34969	1116	104347	6539203
188	375	35344	1122	105469	6644672
189	377	35721	1128	106597	6751269
190	379	36100	1134	107731	6859000
191	381	36481	1140	108871	6967871
192	383	36864	1146	110017	7077888
193	385	37249	1152	111169	7189057
194	387	37636	1158	112327	7301384
195	389	38025	1164	113491	7414875
196	391	38416	1170	114661	7529536
197	393	38809	1176	115837	7645373
198	395	39204	1182	117019	7762392
199	397	39601	1188	118207	7880599
200	399	40000	1194	119401	8000000

Racines.	Progres. gén. des quarrés.	Quarrés.	Progres. gén. des cubes.	Différences des cubes.	Cubes.
201	401	40401	1200	120601	8120601
202	403	40804	1206	121807	8242408
203	405	41209	1212	123019	8365427
204	407	41616	1218	124237	8489664
205	409	42025	1224	125461	8615125
206	411	42436	1230	126691	8741816
207	413	42849	1236	127927	8869743
208	415	43264	1242	129169	8998912
209	417	43681	1248	130417	9129329
210	419	44100	1254	131671	9261000
211	421	44521	1260	132931	9393931
212	423	44944	1266	134197	9528128
213	425	45369	1272	135469	9663597
214	427	45796	1278	136747	9800344
215	429	46225	1284	138031	9938375
216	431	46656	1290	139321	10077696
217	433	47089	1296	140617	10218313
218	435	47524	1302	141919	10360232
219	437	47961	1308	143227	10503459
220	439	48400	1314	144541	10648000
221	441	48841	1320	145861	10793861
222	443	49284	1326	147187	10941048
223	445	49729	1332	148519	11089567
224	447	50176	1338	149857	11239424
225	449	50625	1344	151201	11390625
226	451	51076	1350	152551	11543176
227	453	51529	1356	153907	11697083
228	455	51984	1362	155269	11852352
229	457	52441	1368	156637	12008989
230	459	52900	1374	158011	12167000
231	461	53361	1380	159391	12326391
232	463	53824	1386	160777	12487168
233	465	54289	1392	162169	12649337
234	467	54756	1398	163567	12812904
235	469	55225	1404	164971	12977875

Racines.	Progres. gén. des quarrés.	Quarrés.	Progres. gén. des cubes.	Différences des cubes.	Cubes.
236	471	55696	1410	166381	13144256
237	473	56169	1416	167797	13312053
238	475	56644	1422	169219	13481272
239	477	57121	1428	170647	13651919
240	479	57600	1434	172081	13824000
241	481	58081	1440	173521	13997521
242	483	58564	1446	174967	14172488
243	485	59049	1452	176419	14348907
244	487	59536	1458	177877	14526784
245	489	60025	1464	179341	14706125
246	491	60516	1470	180811	14886936
247	493	61009	1476	182287	15069223
248	495	61504	1482	183769	15252992
249	497	62001	1488	185257	15438249
250	499	62500	1494	186751	15625000
251	501	63001	1500	188251	15813251
252	503	63504	1506	189757	16003008
253	505	64009	1512	191269	16194277
254	507	64516	1518	192787	16387064
255	509	65025	1524	194311	16581375
256	511	65536	1530	195841	16777216
257	513	66049	1536	197377	16974593
258	515	66564	1542	198919	17173512
259	517	67081	1548	200467	17373979
260	519	67600	1554	202021	17576000
261	521	68121	1560	203581	17779581
262	523	68644	1566	205147	17984728
263	525	69169	1572	206719	18191447
264	527	69 96	1578	208297	18399744
265	529	70225	1584	209881	18609625
266	531	70756	1590	211471	18821096
267	533	71289	1596	213067	19034163
268	535	71824	1602	214669	19248832
269	537	72361	1608	216277	19465109
270	539	72900	1614	217891	19683000

Racines.	Progres. gén. des quarrés.	Quarrés.	Progres. gén. des cubes.	Différences des cubes.	Cubes.
271	541	73441	1620	219511	19902511
272	543	73984	1626	221137	20123648
273	545	74529	1632	222769	20346417
274	547	75076	1638	224407	20570824
275	549	75625	1644	226051	20796875
276	551	76176	1650	227701	21024576
277	553	76729	1656	229357	21253933
278	555	77284	1662	231019	21484952
279	557	77841	1668	232687	21717639
280	559	78400	1674	234361	21952000
281	561	78961	1680	236041	22188041
282	563	79524	1686	237727	22425768
283	565	80089	1692	239419	22665187
284	567	80656	1698	241117	22906304
285	569	81225	1704	242821	23149125
286	571	81796	1710	244531	23393656
287	573	82369	1716	246247	23639903
288	575	82944	1722	247969	23887872
289	577	83521	1728	249697	24137569
290	579	84100	1734	251431	24389000
291	581	84681	1740	253171	24642171
292	583	85264	1746	254917	24897088
293	585	85849	1752	256669	25153757
294	587	86436	1758	258427	25412184
295	589	87025	1764	260191	25672375
296	591	87616	1770	261961	25934336
297	593	88209	1776	263737	26198073
298	595	88804	1782	265519	26463592
299	597	89401	1788	267307	26730899
300	599	90000	1794	269101	27000000
301	601	90601	1800	270901	27270901
302	603	91204	1806	272707	27543608
303	605	91809	1812	274519	27818127
304	607	92416	1818	276337	28094464
305	609	93025	1824	278161	28372625

Racines.	Progres. gén. des quarrés.	Quarrés.	Progres. gén. des cubes.	Différences des cubes.	Cubes.
306	611	93636	1830	279991	28652616
307	613	94249	1836	281827	28934443
308	615	94864	1842	283669	29218112
309	617	95481	1848	285517	29503629
310	619	96100	1854	287371	29791000
311	621	96721	1860	289231	30080231
312	623	97344	1866	291097	30371328
313	625	97969	1872	292969	30664297
314	627	98596	1878	294847	30959144
315	629	99225	1884	296731	31255875
316	631	99856	1890	298621	31554496
317	633	100489	1896	300517	31855013
318	635	101124	1902	302419	32157432
319	637	101761	1908	304327	32461759
320	639	102400	1914	306241	32768000
321	641	103041	1920	308161	33076161
322	643	103684	1926	310087	33386248
323	645	104329	1932	312019	33698267
324	647	104976	1938	313957	34012224
325	649	105625	1944	315901	34328125
326	651	106276	1950	317851	34645976
327	653	106929	1956	319807	34965783
328	655	107584	1962	321769	35287552
329	657	108241	1968	323737	35611289
330	659	108900	1974	325711	35937000
331	661	109561	1980	327691	36264691
332	663	110224	1986	329677	36594368
333	665	110889	1992	331669	36926037
334	667	111556	1998	333667	37259704
335	669	112225	2004	335671	37595375
336	671	112896	2010	337681	37933056
337	673	113569	2016	339697	38272753
338	675	114244	2022	341719	38614472
339	677	114921	2028	343747	38958219
340	679	115600	2034	345781	39304000

Racines.	Progres. gén. des quarrés.	Quarrés.	Progres. gén. des cubes.	Différences des cubes.	Cubes.
341	681	116281	2040	347821	39651821
342	683	116964	2046	349867	40001688
343	685	117649	2052	351919	40353607
344	687	118336	2058	353977	40707584
345	689	119025	2064	356041	41063625
346	691	119716	2070	358111	41421739
347	693	120409	2076	360187	41781923
348	695	121104	2082	362269	42144192
349	697	121801	2088	364357	42508549
350	699	122500	2094	366451	42875000
351	701	123201	2100	368551	43243551
352	703	123904	2106	370657	43614208
353	705	124609	2112	372769	43986977
354	707	125316	2118	374887	44361864
355	709	126025	2124	377011	44738875
356	711	126736	2130	379141	45118016
357	713	127449	2136	381277	45499293
358	715	128164	2142	383417	45882712
359	717	128881	2148	385567	46268279
360	719	129600	2154	387721	46656000
361	721	130321	2160	389881	47045881
362	723	131044	2166	392047	47437928
363	725	131769	2172	394219	47832147
364	727	132496	2178	396397	48228544
365	729	133225	2184	398581	48627125
366	731	133956	2190	400771	49027896
367	733	134689	2196	402967	49430863
368	735	135424	2202	405169	49836032
369	737	136161	2208	407377	50243409
370	739	136900	2214	409591	50653000
371	741	137641	2220	411811	51064811
372	743	138384	2226	414037	51478848
373	745	139129	2232	416269	51895117
374	747	139876	2238	418507	52313624
375	749	140625	2244	420751	52734375

Racines.	Progres. gén. des quarrés.	Quarrés.	Progres. gén. des cubes.	Différences des cubes.	Cubes.
376	751	141376	2250	423001	53157376
377	753	142129	2256	425257	53582633
378	755	142884	2262	427519	54010152
379	757	143641	2268	429787	54439939
380	759	144400	2274	432061	54872000
381	761	145161	2280	434341	55306341
382	763	145924	2286	436627	55742968
383	765	146689	2292	438919	56181887
384	767	147456	2298	441217	56623104
385	769	148225	2304	443521	57066625
386	771	148996	2310	445831	57512456
387	773	149769	2316	448147	57960603
388	775	150544	2322	450469	58411072
389	777	151321	2328	452797	58863869
390	779	152100	2334	455131	59319000
391	781	152881	2340	457471	59776471
392	783	153664	2346	459817	60236288
393	785	154449	2352	462169	60698457
394	787	155236	2358	464527	61162984
395	789	156025	2364	466891	61629875
396	791	156816	2370	469261	62099136
397	793	157609	2376	471637	62570773
398	795	158404	2382	474019	63044792
399	797	159201	2388	476407	63521199
400	799	160000	2394	478801	64000000

DEUXIÈME MÉTHODE

De trouver le produit du multiplicande par le multiplicateur.

Nous disons qu'une puissance quelconque peut être considérée comme produit ou comme dividende, et que la puissance qui la précède immédiatement peut être considérée comme multiplicande ou comme quotient. De ce principe général, il résulte que le cube divisé par sa racine, a pour quotient ou pour multiplicande, le quarré de cette même racine, et que le quarré multiplié par sa racine, a pour dividende ou pour produit, le cube de cette même racine; il résulte aussi que, dans l'un et l'autre cas, la racine peut être considérée comme multiplicateur ou comme diviseur. Ainsi le produit, le multiplicande et le multiplicateur ont un rapport exact avec le dividende, le quotient et le diviseur.

Le tableau fait jusqu'à 400, où les carrés et les cubes des racines correspondantes sont formés. Si les quarrés sont considérés comme des multiplicandes, alors les cubes qui leur correspondent, et qui leur sont immédiatement supérieurs, sont nécessairement leurs produits.

Les exemples suivans confirment cette vérité arithmétique.

EXEMPLE I^er^.

Si nous voulons multiplier 16 par 4, nous savons, 1°. que 16, le multiplicande, est le quarré de 4; 2°. que 64, le cube correspondant, la puissance immédiatement supérieure au quarré, est le produit de 16 multiplié par 4.

EXEMPLE II.

Si nous voulons multiplier 25 par 5, nous savons, 1°. que 25, le multiplicande, est le quarré de 5; 2°. que 125, le cube

correspondant, la puissance immédiatement supérieure au quarré, est le produit de 25 multiplié par 5.

EXEMPLE III.

Si nous voulons multiplier 36 par 6, nous savons, 1°. que 36, le multiplicande, est le quarré de 6; 2°. que 216, le cube correspondant, la puissance immédiatement supérieure au quarré, est le produit de 36 multiplié par 6.

EXEMPLE IV.

Si nous voulons multiplier 49 par 7, nous savons, 1°. que 49, le multiplicande, est le quarré de 7; 2°. que 343, le cube correspondant, le puissance immédiatement supérieure au quarré, est le produit de 49 multiplié par 7.

Dans les quatre exemples ci-dessus donnés, nous avons choisi des multiplicandes qui sont précisément les puissances des multiplicateurs, considérés comme des racines, afin de montrer clairement que chaque puissance d'un degré immédiatement supérieur à chacune des puissances multiplicandes, indique justement les produits cherchés. D'après ces exemples, nous pensons que cette méthode peut se généraliser et s'appliquer à toutes les puissances possibles. Pour la suivre à la lettre, nous élevons le multiplicateur, considéré comme la racine, successivement au carré et au cube. 1°. Nous soustrayons le quarré, qui peut être doublé, triplé, quadruplé, etc., du premier membre du multiplicande, pour avoir un reste auquel nous joignons le chiffre suivant du multiplicande; nous plaçons le cube correspondant qu'on aura doublé, triplé, quadruplé, etc., pour premier produit partiel. 2°. Nous soustrayons, comme dans la première opération, le quarré du second membre du multiplicande, pour avoir un reste auquel nous joignons le chiffre suivant du multiplicande; nous plaçons le cube, pour second quotient partiel, sous le premier, en avançant un chiffre vers

la droite, par la raison que nous avons pris, en allant de gauche à droite, un chiffre du multiplicande. Nous terminons cette opération en remarquant que, quand le quarré excède le reste du multiplicande, alors on cherche combien de fois le multiplicateur est compris dans ce reste, et nous prenons autant de fois le quarré correspondant, la puissance immédiatement supérieure, pour produit partiel, que nous plaçons directement sous le dernier, si l'on n'a pris aucun chiffre du multiplicande, et en remarquant aussi que, quand le multiplicateur excède le reste du multiplicande, alors on multiplie ce reste par le multiplicateur, et l'on place directement le produit sous le dernier.

EXEMPLE V.

Multiplicand.	Le cube est le produit.	Le quarré est le 1er multiplicat.	La racine est le 2e multiplicat.
485629	50653	1369	37
4107			
7492			Prod. partiels.
6845			151959
6479			253265
5476			202612
1003			36963
999			148
4 multiplié par 37 égale 148.		Produit total.	17968273.

Pour multiplier le nombre 485629 par 37, 1°. nous cherchons le cube du multiplicateur 37, considéré comme racine, qui est 50653, et son quarré, qui est 1369; puis nous voyons que 4107, le triple du quarré 1369, le premier multiplicateur, peut être ôté de 4856, le premier membre du multiplicande; nous prenons 151959, le triple du cube correspondant 50653, puissance immédiatement supérieure au quarré, pour premier produit partiel. 2°. Nous soustrayons

4107 de 4856, pour avoir le reste 749, auquel nous mettons à la suite le chiffre 2; 7492 est le second membre du multiplicande, duquel nous pouvons ôter 6845, le quintuple du quarré 1369; nous prenons 253265, le quintuple du cube 50653, pour second produit partiel, que nous plaçons sous le premier en avançant un chiffre vers la droite, par la raison que nous avons pris, en allant de gauche à droite, un chiffre du multiplicande. 3°. Nous soustrayons 6845 de 7492, pour avoir le reste 647, auquel nous mettons à la suite le chiffre 9; 6479 est le troisième membre du multiplicande, duquel nous pouvons ôter 5476, le quadruple du quarré 1369; nous prenons 202612, le quadruple du cube 50653, pour troisième produit partiel, que nous plaçons sous le second en avançant un chiffre vers la droite, par la raison que nous avons pris, en allant de gauche à droite, un chiffre du multiplicande. 4°. Nous soustrayons 5476 de 6479; 1003 est le quatrième membre du multiplicande, dont nous ne pouvons pas ôter le quarré 1369, qui est numériquement plus grand, mais successivement 74, le double, et 259, le septuple de 37, total 999, le produit de 27 multiplié par 37; nous prenons 2738, le double, et 9583, le septuple de 1369, le quarré, puissance immédiatement supérieure à la précédente, total 36963, le produit du quarré 1369 multiplié par 27, pour quatrième produit partiel, que nous plaçons directement sous le dernier, ainsi que 148, le produit du reste 4 multiplié par 37. 5°. Nous additionnons les produits partiels 151959, 253265, 202612, 36963, 148, selon l'ordre où ils sont placés, pour avoir 17968273, le produit total, qui est exactement celui du nombre 485629 multiplié par 37.

EXEMPLE VI.

Multiplicand.	Le cube est le produit.	Le quarré est le 1er multiplicat.	La racine est le 2e multiplicat.
$21272\frac{22}{46}$	97336	2116	46
2116			Prod. partiels.
112			97336
92			4232
20 multiplié par 46			920
égale 920.			22
22, le numérateur de la fraction $\frac{22}{46}$, dont on ôte le dénominat. 46, est sa vraie valeur dans ce calcul.		Produit. total.	978534.

Si nous voulons multiplier $21272\frac{22}{46}$ par 46, 1°. nous cherchons le cube du multiplicateur 46, considéré comme racine, qui est 97336, et son quarré, qui est 2116; puis nous voyons que 2116, le quarré de 46, peut être ôté de 2127, premier membre du multiplicande; nous prenons 97336, le cube correspondant, puissance immédiatement supérieure au quarré, pour premier produit partiel. 2°. Nous soustrayons 2116 de 2127, pour avoir le reste 11, auquel nous mettons à la suite le chiffre 2; 112 est le second membre du multiplicande, dont nous ne pouvons pas ôter le quarré 2116, comme numériquement plus grand, mais bien 92, le double de 46, le multiplicateur; nous prenons 4232, le double du quarré 2116, puissance immédiatement supérieure à la précédente, pour second produit partiel, que nous plaçons sous le premier en avançant un chiffre vers la droite, parce que nous avons pris un chiffre du multiplicande. 3°. Nous soustrayons 92 de 112; le reste 20 est le troisième membre du multiplicande, que nous multiplions par 46, pour avoir 920, le troisième produit partiel, que nous plaçons directement sous le second, ainsi que 22, le

numérateur de la fraction $\frac{22}{46}$, dont nous ôtons le dénominateur 46, afin de la réduire à sa vraie valeur dans le calcul. 4°. Nous additionnons les produits partiels 97336, 4232, 920, 22, selon l'ordre où ils sont placés, pour avoir le produit total 978534, qui est exactement celui du nombre 21272 $\frac{22}{46}$ multiplié par 46.

EXEMPLE VII.

Multiplicand.	Le cube est le produit.	Le quarré est le 1er multiplicat.	La racine est le 2e multiplicat.
800028 $\frac{8}{98}$	941192	9604	98
76832			Prod. partiels.
31708			7529536
28812			2823576
2896			278516
2842			5292
54 multiplié par 98			8
égale 5292.		Produit total.	78402752.

Lorsqu'on ôte de la fraction $\frac{8}{98}$ le dénominateur 98, alors le numérat. 8 est réduit à sa vraie valeur dans ce calcul.

Si nous voulons multiplier 800028 $\frac{8}{98}$ par 98, 1°. nous chierchons le cube du multiplicateur 98, considéré comme racine, qui est 941192, et son quarré, qui est 9604; puis nous voyons que 76832, l'octuple de 9604, quarré de 98, peut être ôté de 80002, premier membre du multiplicande; nous prenons 7429536, l'octuple de 941192, cube correspondant, puissance immédiatement supérieure au quarré, pour premier produit partiel. 2°. Nous soustrayons 76832 de 80002, premier membre du multiplicande, pour avoir le reste 3170, auquel nous mettons à la suite le chiffre 8; 31708 est le second membre du multiplicande, dont nous

pouvons ôter 28812, le triple du quarré 9604; nous prenons 2823576, le triple du cube 941192, pour second produit partiel, que nous plaçons sous le premier, en avançant un chiffre vers la droite, parce que nous avons pris, en allant de gauche à droite, un chiffre du multiplicande. 3°. Nous soustrayons 28812 de 31708; le reste 2896 est le troisième membre du multiplicande, dont nous ne pouvons pas ôter le quarré 9604, comme numériquement plus grand, mais successivement 196, le double, 882, le nonuple de 98, le multiplicateur, total 2842, le produit de 98 multiplié par 29; nous prenons successivement 19208, le double, 86436, le nonuple du quarré 9604, total 278516, le produit du quarré 9604 par 29, puissance immédiatement supérieure à la précédente, pour troisième produit partiel, que nous plaçons directement sous le second, parce que nous n'avons pris aucun chiffre du multiplicande. 4°. Nous soustrayons 2842 de 2896; le reste est 54, le quatrième membre du multiplicande, que nous multiplions par 98, pour avoir 5292, le quatrième produit partiel, que nous plaçons directement sous le troisième, ainsi que 8, le numérateur de la fraction $\frac{8}{98}$, dont nous ôtons le dénominateur 98, afin de la réduire à sa vraie valeur dans ce calcul. 5°. Nous additionnons les produits partiels 7529536, 2823576, 278516, 52928, selon l'ordre où ils sont placés, pour avoir le produit total 78402752, qui est exactement celui du nombre 800028 $\frac{8}{98}$ multiplié par 98.

EXEMPLE VIII.

Multiplicand.	Le cube est le produit.	Le quarré est le 1er multiplicat.	La racine est le 2e multiplicat.
$34183081\frac{9}{253}$	16194277	64009	253
320045			
217858			Prod. partiels.
192027			80971385
258311			48582831
256036			64777108
2275			512072
2024			63503
$\frac{9}{253}\times 253=\frac{9\times 253}{253}=9.$			9
		Produit total.	8648319502.

Si nous voulons multiplier $34183081\frac{9}{253}$ par 253, 1°. nous cherchons le cube du multiplicateur 253 considéré comme racine, qui est 16194277, et son quarré, qui est 64009; puis nous voyons que 320045, le quintuple de 64009, quarré de 253, peut être ôté de 341830, premier membre du multiplicande; nous prenons 80971385, le quintuple de 16194277, cube correspondant, pour premier produit partiel. 2°. Nous soustrayons 320045 de 341830, premier membre du multiplicande, pour avoir le reste 21785, auquel nous mettons à la suite le chiffre 8; 217858 est le second membre du multiplicande, dont nous pouvons ôter 192027, le triple du quarré 64009; nous prenons 48582831, le triple du cube 16194277, pour second produit partiel, que nous plaçons sous le premier, en avançant un chiffre vers la droite, par la raison que nous avons pris, en allant de gauche à droite, un chiffre du multiplicande. 3°. Nous soustrayons 192027 de 217858, second membre du multiplicande, pour avoir le reste 25831, auquel nous mettons à la suite le chiffre 1; 258311 est le troisième membre du multiplicande, dont nous pouvons ôter

256036, le quadruple du quarré 64009; nous prenons ... 64777108, le quadruple du cube 16194277, pour troisième produit partiel, que nous plaçons sous le second, en avançant un chiffre vers la droite, par la raison que nous avons pris, en allant de gauche à droite, un chiffre du multiplicande. 4°. Nous soustrayons 256036 de 258311, troisième membre du multiplicande, pour avoir le reste 2275, le quatrième membre du multiplicande, dont nous ne pouvons pas ôter le quarré 64009, comme numériquement plus grand, mais bien 2024, l'octuple du multiplicateur 253; nous prenons 512072, l'octuple du quarré 64009, puissance immédiatement supérieure à la précédente, pour quatrième produit partiel, que nous plaçons directement sous le troisième, parce que nous n'avons pris aucun chiffre du multiplicande. 5°. Nous soustrayons 2024 de 2275, pour avoir le reste 251, le cinquième membre du multiplicande, lequel multiplié par 253, fait 63503, le cinquième produit partiel, que nous plaçons directement sous le dernier, ainsi que le numérateur 9 de la fraction $\frac{9}{253}$, dont nous ôtons le dénominateur 253 afin de la réduire à sa vraie valeur dans ce calcul. 6°. Nous additionnons les produits partiels 80971385, 4858231, .. 64777108, 512072, 63503, 9, selon l'ordre où ils sont placés, pour avoir le produit total 864831950 2, qui est exactement celui du nombre 34183081 $\frac{9}{253}$ multiplié par 253.

EXEMPLE IX.

Multiplicand.	Le cube est le produit.	Le quarré est le 1er multiplicat.	La racine est le 2e multiplicat.
$821125382\frac{22}{84}$	592704	7056	84

7056
11552
7056
44965
42336
26293
21168
51258
49392
18662
14112
45506
42336
3170
3108

Produits partiels.
592704
592704
3556224
1778112
4148928
1185408
3556224
261072
5208
22
Prod. total. 689745321406.

$62 \times 84 = 5208$.

Le numérateur 22 de la fraction $\frac{22}{84}$, dont on a ôté le dénominateur 84, est seul suffisant dans ce calcul.

Si nous voulons multiplier $821125382\frac{22}{84}$ par 84, 1°. nous cherchons le cube du multiplicateur 84 considéré comme racine, qui est 592704, et son quarré, qui est 7056; puis nous voyons que 7056, le quarré, peut être ôté de 9211, le premier membre du multiplicande; nous prenons 592704, le cube correspondant, pour premier produit partiel. 2°. Nous soustrayons 7056 de 8211, premier membre du multiplicande, pour avoir le reste 1155, auquel nous joignons le chiffre 2; 11552 est le second membre du multiplicande,

dont nous pouvons ôter 7056, le quarré; nous prenons... 592704, le cube correspondant, pour second produit partiel, que nous plaçons sous le premier, en avançant un chiffre vers la droite. 3°. Nous soustrayons 7056 de 11552, pour avoir le reste 4496, auquel nous joignons le chiffre 5; 44965 est le troisième membre du multiplicande, dont nous pouvons ôter 42336, le sextuple du quarré 7056; nous prenons 3556224, le sextuple du cube 592704, pour troisième produit partiel, que nous plaçons sous le second, en avançant un chiffre vers la droite. 4°. Nous soustrayons 42336 de 44965, pour avoir le reste 2629, auquel nous joignons le chiffre 3; 26293 est le quatrième membre du multiplicande, dont nous pouvons ôter 21168, le triple du quarré 7056; nous prenons 1778112, le triplé du cube 592704, pour quatrième produit partiel, que nous plaçons sous le troisième, en avançant un chiffre vers la droite. 5°. Nous soustrayons 21168 de 26293, pour avoir le reste 5125, auquel nous joignons le chiffre 8; 51258 est le cinquième membre du multiplicande, dont nous pouvons ôter 49392, le septuple du quarré 7056; nous prenons 4148928, le septuple du cube 592704, pour cinquième produit partiel, que nous plaçons sous le quatrième, en avançant un chiffre vers la droite. 6°. Nous soustrayons 49392 de 51258, pour avoir le reste 1866, auquel nous joignons le chiffre 2; 18662 est le sixième membre du multiplicande, dont nous pouvons ôter 14112, le double du quarré 7056; nous prenons 1185408, le double du cube 592704, pour sixième produit partiel, que nous plaçons sous le cinquième, en avançant un chiffre vers la droite. 7°. Nous soustrayons 14112 de 18662, pour avoir le reste 4550, auquel nous joignons le chiffre 6; 45506 est le septième membre du multiplicande, dont nous pouvons ôter 42336, le sextuple du quarré 7056; nous prenons 3556224, le sextuple du cube 592704, pour septième produit partiel, que nous plaçons sous le sixième, en avançant un chiffre vers la droite. 8°. Nous soustrayons 42336 de 45506, pour avoir le

reste 3170, dont nous ne pouvons pas ôter le quarré 7056, mais successivement 252, le triple, et 588, le sextuple de 84, total 3108, le produit de 84 multiplié par 37; nous prenons aussi successivement 21168, le triple, et 49392, le sextuple du quarré 7056, total 261072, le produit du quarré 7056, multiplié par 37, lequel est le huitième produit partiel, que nous plaçons directement sous le septième. 9°. Nous soustrayons 3108 de 3170, pour avoir le reste 62, lequel multiplié par 84 fait 5208, pour neuvième produit partiel, que nous plaçons directement sous le huitième, ainsi que le numérateur 22 de la fraction $\frac{22}{84}$, dont on aura ôté le dénominateur, afin de la réduire à sa vraie valeur dans ce calcul. 10°. Nous additionnons les produits partiels 592704, 592704, 3556224, 1778112, 4148928, 1185408, 3556224, 261072, 5208, 22, selon l'ordre où ils sont placés, afin d'avoir le produit total 689745321406, qui est exactement celui du nombre $8211253826\frac{22}{84}$ multiplié par 84.

ABRÉGER LA DIVISION,

Ou trouver plus brièvement les quotiens des nombres divisés par d'autres.

Quoique nous ayons dit que les produits, les multiplicandes et les multiplicateurs ont un rapport exact avec les dividendes, les quotiens et les diviseurs, cependant les règles sont directement opposées, puisque, dans la multiplication d'un nombre par un autre, les produits sont les résultats des multiplicandes par les multiplicateurs, et que, dans la division d'un nombre par un autre, les quotiens sont les résultats des dividendes par les diviseurs. Pour obtenir les premiers, nous nous sommes servi du tableau où les quarrés et les cubes sont formés jusqu'à 400; nous avons examiné combien de fois le quarré est contenu dans le premier membre du multiplicande, puis nous avons pris le même nombre de fois le cube correspondant,

puissance immédiatement supérieure au quarré, pour premier produit partiel, et ainsi nous avons continué notre opération jusqu'à la fin. Pour trouver les seconds, nous nous servirons du même tableau; nous examinerons combien de fois le cube est contenu dans le premier membre du dividende, puis nous prendrons le même nombre de fois le quarré correspondant, puissance immédiatement inférieure au cube, pour premier quotient partiel, et ainsi nous terminerons notre calcul.

La méthode tendante à trouver aussi facilement que sûrement et brièvement le quotient d'un dividende quelconque consiste à considérer le diviseur comme racine. Le tableau précédent, où les quarrés et les cubes sont formés jusqu'à 400, qui nous a servi à trouver les produits des nombres multipliés par d'autres, servira aussi à trouver les quotiens des nombres divisés par d'autres.

Ce tableau est composé de six colonnes : la première contient les racines; la seconde, la progression génératrice des quarrés, croissante de deux en deux unités; la troisième, les quarrés formés par l'addition successive des termes de cette première série; la quatrième contient la progression génératrice des cubes, croissante de six en six unités; la cinquième, la suite des différences des cubes, qui a 1 pour premier terme et qui est formée par l'addition successive des termes de cette seconde série; la sixième, les cubes formés par l'addition successive des termes de la suite comprise dans la cinquième colonne.

Maintenant nous allons montrer l'utilité de ce tableau, qui comprend les racines, les quarrés et les cubes, dans les exemples suivans, pour abréger et faciliter la division.

Lorsqu'on a un nombre à diviser par un autre, alors nous élevons le diviseur considéré comme racine au cube, que nous doublons, triplons ou quadruplons, etc., suivant qu'il peut être ôté du dividende, et nous avons, en suivant les mêmes proportions, le quarré correspondant, que nous doublons,

iplons ou quadruplons, etc., pour quotient partiel; ainsi de uite, jusqu'à ce que nous ayons terminé la division.

Nous remarquons que toutes les fois que nous prenons vers droite un chiffre du dividende pour continuer la division, lors nous plaçons sous le premier quotient partiel les chif-es du second quotient partiel, qui dépassent d'un chiffre ers la droite ceux du premier; ainsi de suite, jusqu'à ce que ous ayons fini la division. Mais lorsqu'on ne prend aucun hiffre du dividende, en ce cas on a soin que les derniers hiffres du quotient partiel ne dépassent pas ceux du pré-édent.

Nous observons que lorsque chaque puissance qui divise est numériquement plus grande que le reste du dividende sans avoir obtenu le quotient qu'on cherche, il faut employer la puissance inférieure pour continuer la division, et placer au quotient la puissance qui précède immédiatement celle qui lui sert de diviseur et qui lui correspond, afin d'éviter, par cette succession de puissances descendantes, de prendre la moitié, le quart, le huitième, des premières puissances, pour terminer cette opération, et d'avoir aussi au quotient des fractions qui rendent ce calcul très pénible.

Tout ce que nous avons dit et nous dirons dans la suite nous montrera clairement qu'une puissance quelconque peut être considérée comme produit ou comme dividende, et que la puissance qui la précède immédiatement peut être considérée comme multiplicande ou comme quotient. De ce principe général il résulte que le quarré multiplié par sa racine a pour produit le cube de cette même racine, et que le cube divisé par sa racine a pour quotient le quarré de cette même racine. L'application de la première règle à la seconde est si facile, que, dans les exemples suivans, en mentionnant les racines, les quarrés et les cubes du tableau ci-dessus, qui peuvent être calculés d'après nos principes établis jusqu'aux plus grands nombres, nous indiquerons aussi les diviseurs, les quotiens et les dividendes comme signes représentatifs.

EXEMPLE I^er.

Si nous voulons diviser 64 par 4, nous savons, 1°. que 64, le dividende, est le cube de 4; 2°. que 16, le quarré de 4, la puissance immédiatement inférieure au cube, est effectivement le quotient de 64 divisé par 4.

EXEMPLE II.

Si nous voulons diviser 125 par 5, nous savons, 1°. que 125, le dividende, est le cube de 5; 2°. que 25, le quarré de 5, la puissance immédiatement inférieure au cube, est effectivement le quotient de 125 divisé par 5.

EXEMPLE III.

Si nous voulons diviser 216 par 6, nous savons, 1°. que 216, le dividende, est le cube de 6; 2°. que 36, le quarré de 6, la puissance immédiatement inférieure au cube, est effectivement le quotient de 216 divisé par 6.

EXEMPLE IV.

Si nous voulons diviser 343 par 7, nous savons, 1°. que 343, le dividende, est le cube de 7; 2°. que 49, le quarré de 7, la puissance immédiatement inférieure au cube, est effectivement le quotient de 343 divisé par 7.

EXEMPLE V.

Si nous voulons diviser 512 par 8, nous savons, 1°. que 512, le dividende, est le cube de 8; 2°. que 64, le quarré de 8, la puissance immédiatement inférieure au cube, est effectivement le quotient de 512 divisé par 8.

EXEMPLE VI.

Si nous voulons diviser 729 par 9, nous savons, 1°. que

729, le dividende, est le cube de 9; 2°. que 81, le quarré de 9, la puissance qui précède immédiatement le cube, est effectivement le quotient de 729 divisé par 9.

EXEMPLE VII.

Si nous voulons diviser 1331 par 11, nous savons, 1°. que 1331, le dividende, est le cube de 11; 2°. que 121, le quarré de 11, la puissance qui précède immédiatement le cube, est effectivement le quotient de 1331 divisé par 11.

EXEMPLE VIII.

Si nous voulons diviser 1728 par 12, nous savons, 1°. que 1728, le dividende, est le cube de 12; 2°. que 144, le quarré de 12, la puissance qui précède immédiatement le cube, est effectivement le quotient de 1728 divisé par 12.

EXEMPLE IX.

Si nous voulons diviser 2197 par 13, nous savons, 1°. que 2197, le dividende, est le cube de 13; 2°. que 169, le quarré de 13, la puissance qui précède immédiatement le cube, est effectivement le quotient de 2197 divisé par 13.

EXEMPLE X.

Si nous voulons diviser 2744 par 14, nous savons, 1°. que 2744, le dividende, est le cube de 14; 2°. que 196, le quarré de 14, la puissance qui précède immédiatement le cube, est effectivement le quotient de 2744 divisé par 14.

Dans les dix exemples ci-dessus donnés, nous avons choisi des dividendes qui sont justement les puissances des diviseurs, afin de faire voir que chaque puissance d'un degré immédiatement inférieur à chacune des puissances dividendes indique précisément les quotiens cherchés. D'après ces exem-

ples, nous pensons que cette méthode peut se généraliser et s'appliquer à toutes les puissances possibles.

Effectivement, pour diviser un nombre quelconque, si nous élevons le diviseur à la neuvième puissance, la huitième puissance correspondante sera le quotient partiel; si nous élevons le diviseur à la huitième puissance, la septième puissance correspondante sera le quotient partiel; si nous élevons le diviseur à la septième puissance, la sixième puissance correspondante sera le quotient partiel; si nous élevons le diviseur à la sixième puissance, la cinquième puissance correspondante sera le quotient partiel; si nous élevons le diviseur à la cinquième puissance, la quatrième puissance correspondante sera le quotient partiel; si nous élevons le diviseur à la quatrième puissance, le cube correspondant sera le quotient partiel.

Ainsi, la racine représente le diviseur, la puissance supérieure représente le dividende ou partie du dividende, la puissance immédiatement inférieure représente le quotient ou le quotient partiel.

Cette manière de trouver les quotiens est aussi sûre que simple, tant à l'égard des grandes puissances qu'à l'égard des petites. Cette découverte nous fera facilement trouver les quotiens partiels des membres du dividende, dont la somme est le quotient total du nombre à diviser, puisqu'il s'agit seulement d'élever le diviseur au cube, que nous ne dépasserons point, et de prendre le quarré correspondant pour quotient partiel, afin de nous servir du tableau fait pour faciliter ce calcul, et contenant les quarrés, les cubes jusqu'à 400, pour abréger ainsi la division. Lorsqu'on ne pourra pas diviser le reste du dividende par le diviseur élevé au cube, alors il faudra seulement l'élever au quarré, et prendre le diviseur correspondant pour quotient partiel. Lorsqu'on ne pourra pas diviser le reste du dividende par le quarré, il faudra diviser ce restant par le diviseur, qui peut être employé un certain nombre de

fois, et prendre pour quotient partiel un pareil nombre d'unités.

EXEMPLE XI.

Dividende.	1er diviseur.	2e diviseur.	3e diviseur.
978534	97336	2116	46
97336			
5174			Quotiens partiels.
4232			2116
942			92
920			$20\frac{22}{46}$
$\frac{22}{46}$		Quotient total.	$21272\frac{22}{46}$.

Pour diviser 978534 par 46, 1°. nous cherchons le cube du diviseur 46, qui est 97336, lequel peut seulement être ôté une fois de 97853, premier membre du dividende; nous prenons aussi une fois 2116, quarré correspondant, puissance immédiatement inférieure au cube, pour premier quotient partiel. 2°. Nous soustrayons le cube 97336 de 97853, premier membre du dividende; le reste est 517, auquel nous joignons le chiffre 4; 5174 est le second membre du dividende, duquel nous pouvons ôter 4232, le double de 2116, quarré de 46; nous prenons aussi 92, le double du diviseur 46, puissance immédiatement inférieure au quarré, pour second quotient partiel, que nous plaçons sous le premier, en sorte que les chiffres du second dépassent d'un chiffre vers la droite ceux du premier, par la raison que nous avons pris, en allant de gauche à droite, un chiffre du dividende. 3°. Nous soustrayons 4232 de 5174; nous avons 942 pour troisième membre du dividende, lequel divisé par 46 donne $20\frac{22}{46}$ pour troisième quotient partiel, que nous plaçons directement sous le second, par la raison que nous n'avons pris aucun chiffre du dividende. 4°. Nous additionnons les quotiens partiels 2116, 92, $20\frac{22}{46}$ selon l'ordre où ils sont placés, pour avoir

21272 $\frac{22}{46}$, le quotient total, qui est exactement celui du nombre 978534 divisé par 46.

EXEMPLE XII.

Dividende.	1er diviseur.	2e diviseur.	3e diviseur.
78402752	941192	9604	98
7529536			
3107392		Quotiens partiels.	
2823576		76832	
283816		28812	
278516		2842	
5300		54 $\frac{8}{98}$	
5292	Quotient total.	800028 $\frac{8}{98}$.	
$\frac{8}{98}$.			

Pour diviser 78402752 par 98, 1°. nous cherchons le cube du diviseur 98, qui est 941192, lequel octuplé fait 7529536, qui peut être ôté de 7840275, premier membre du dividende; nous prenons aussi 76832, l'octuple de 9604, le quarré correspondant, puissance immédiatement inférieure au cube, pour premier quotient partiel. 2°. Nous soustrayons 7529536 de 7840275, premier membre du dividende; la reste est... 310739, auquel nous joignons le chiffre 2; 3107392 est le second membre du dividende, duquel nous pouvons ôter... 2823576, le triple du cube 941192; nous prenons aussi 28812, le triple du quarré 9604, pour second quotient partiel, que nous plaçons sous le premier, en avançant un chiffre vers la droite, par la raison que nous avons pris, en allant de gauche à droite, un chiffre du dividende. 3°. Nous soustrayons... 2823576 de 3107392; le reste est 283816, le troisième membre du dividende, dont nous ne prendrons plus pour diviseur le cube de 98, mais bien son quarré, et pour quotient partiel la puissance immédiatement inférieure; de ce troisième membre du dividende nous pouvons ôter successivement 19208, le double, et 86436, le nonuple du quarré 9604, to-

tal 278516, qui égale 29 fois le quarré 9604; nous prenons aussi 196, le double, et 872, le nonuple de 98, total 2842, qui égale 29 fois le diviseur 98, pour troisième produit partiel, que nous plaçons sous le second, sans avancer aucun chiffre vers la droite, parce que nous n'avons ajouté aucun chiffre du dividende. On suivra le même procédé pour les quotiens partiels suivans. 4°. Nous soustrayons 278516, le total, de 283816; le reste est 5300, le quatrième membre du dividende, duquel nous pouvons ôter successivement 490, le quintuple, et 392, le quadruple du diviseur 98, dont le total est 5292, le produit de 98 multiplié par 54; nous prenons 54 pour quatrième quotient partiel. 5°. 5292 étant ôté de 5300, le restant du dividende est la fraction $\frac{8}{89}$. 6°. Nous additionnons les quotiens partiels 76832, 28812, 2842, la somme de 196 et de 882, et $54\frac{8}{98}$, suivant l'ordre où ils sont placés, pour avoir $800028\frac{8}{98}$, le quotient total, qui est exactement celui du nombre 78402752 divisé par 98.

EXEMPLE XIII.

Dividende.	1er diviseur.	2e diviseur.	3e diviseur.
86483195o2	16194277	64009	253
8o971385			
551118100		Quotiens partiels.	
48582831		320045	
65352692		192027	
64777108		256036	
575584		2024	
512072			$251\frac{9}{253}$
63512	Quotient total.	34183081	$\frac{9}{253}$.
53503			
$\frac{9}{253}$.			

Pour diviser 86483195o2 par 253, 1°. nous cherchons le cube du diviseur 253, qui est 16194277, lequel pris cinq fois

fait 80971385 et peut être ôté de 86483195, le premier membre du dividende; nous prenons 320045, le quintuple de 64009, quarré correspondant, puissance immédiatement inférieure au cube, pour premier quotient partiel. 2°. Nous soustrayons 80971385 de 86483195, premier membre du dividende; le reste est 5511810, auquel nous joignons le zéro 0; 55118100 est le second membre du dividende, duquel nous pouvons ôter 48582831, le triple du cube 16194277; nous prenons aussi 192027, le triple de 64009, quarré correspondant, puissance immédiatement inférieure au cube, pour second quotient partiel, que nous plaçons sous le premier, en avançant un chiffre vers la droite, par la raison que nous avons pris, en allant de gauche à droite, un chiffre du dividende. 3°. Nous soustrayons 48582831 de 55118100; le reste est 6535269, auquel nous joignons le chiffre 2; 65352692 est le troisième membre du dividende, dont nous pouvons ôter 64777108, le quadruple du cube 16194277; nous prenons 256036, le quadruple du quarré 64009, pour troisième quotient partiel, que nous plaçons sous le second, en avançant un chiffre vers la droite, par la raison que nous avons pris, en allant de gauche à droite, un chiffre du dividende. 4°. Nous soustrayons 64777108 de 65352692; le reste 575584 est le quatrième membre du dividende, dont nous pouvons ôter 512072, l'octuple du quarré 64009; nous prenons 2024, l'octuple du diviseur 253, pour quatrième quotient partiel, que nous plaçons directement sous le troisième, parce que nous n'avons pris aucun chiffre du dividende. 5°. Nous soustrayons 512072 de 575584; le reste 63512 est le cinquième membre du dividende, dont nous pouvons ôter successivement 506, 1265 et 253, total 53503; nous prenons $251\frac{9}{253}$ pour cinquième quotient partiel. 6°. Nous additionnons les quotiens partiels 320045, 192027, 256036, 2024 et $251\frac{9}{253}$, suivant l'ordre où ils sont placés, pour avoir $24183081\frac{9}{253}$, le quotient total, qui est exactement celui du nombre..... 8648319502 divisé par 253.

EXEMPLE XIV.

Dividende.	1er diviseur.	2e diviseur.	3e diviseur.
6897453214o6	592704	7056	84
592704			
970413		Quotiens partiels.	
592704		7056	
3777092		7056	
3556224		42336	
220868 1		21168	
1778112		49392	
430569 4		14112	
4148928		42336	
1567660		3108	
1185408			62 $\frac{22}{84}$
3822526	Quotient total.	821125382 6 $\frac{22}{84}$.	
3556224			
266302			
261072			
5230			
5208 $\frac{22}{84}$.			

Pour diviser 6897453214o6 par 84, 1°. nous cherchons le cube du diviseur 84, qui est 592704, qui peut être ôté une fois de 689745, le premier membre du dividende; nous prenons une fois 7056, le quarré correspondant, puissance immédiatement inférieure au cube, pour premier quotient partiel. 2°. Nous soustrayons 592704 de 689745, premier membre du dividende; le reste est 97041, auquel nous joignons le chiffre 3; 970413 est le second membre du dividende, duquel nous pouvons ôter une fois 592704, le cube de 84; nous prenons une fois 7056, le quarré correspondant, puissance immédiatement inférieure au cube, pour second quotient partiel, que nous plaçons sous le premier en avançant un chiffre vers la droite, par la raison que nous avons pris, en

allant de gauche à droite, un chiffre du dividende. 3°. Nous soustrayons 592704 de 970413; le reste est 377709, auquel nous joignons le chiffre 2; 3777092 est le troisième membre du dividende, duquel nous pouvons ôter 3556224, le sextuple du cube 592704; nous prenons 42336, le sextuple de 7056, quarré correspondant, puissance immédiatement inférieure au cube, pour troisième quotient partiel, que nous plaçons sous le second, en avançant un chiffre vers la droite, par la raison que nous avons pris, en allant de gauche à droite, un chiffre du dividende. 4°. Nous soustrayons 3556224 de 3777092; le reste est 220868, auquel nous joignons le chiffre 1; 2208681 est le quatrième membre du dividende, duquel nous pouvons ôter 1778112, le triple du cube 592704; nous prenons 21168, le triple de 7056, quarré correspondant, puissance immédiatement inférieure au cube, pour quatrième quotient partiel, que nous plaçons sous le troisième en avançant un chiffre vers la droite, par la raison que nous avons pris, en allant de gauche à droite, un chiffre du dividende. 5°. Nous soustrayons 1778112 de 2208681; le reste est... 430569, auquel nous joignons le chiffre 4; 4305694 est le cinquième membre du dividende, duquel nous pouvons ôter 4148928, le sextuple du cube 592704; nous prenons 49392, le sextuple de 7056, quarré correspondant, puissance immédiatement inférieure au cube, pour cinquième quotient partiel, que nous plaçons sous le quatrième en avançant un chiffre vers la droite, par la raison que nous avons pris, en allant de gauche à droite, un chiffre du dividende. 6°. Nous soustrayons 4148928 de 4305694; le reste est 156766, auquel nous joignons le chiffre 0; 1567660 est le sixième membre du dividende, duquel nous pouvons ôter 1185408, le double du cube 592704; nous prenons 14112, le double de 7056, quarré correspondant, puissance immédiatement inférieure au cube, pour sixième quotient partiel, que nous plaçons sous le cinquième en avançant un chiffre vers la droite, par la raison que nous avons pris, en allant de gauche à droite, un

chiffre du dividende. 7°. Nous soustrayons 1185408 de.. 1567660; le reste est 382252, auquel nous joignons le chiffre 6; 3822526 est le septième membre du dividende, duquel nous pouvons ôter 3556224, le sextuple du cube 592704; nous prenons 42336, le sextuple de 7056, quarré correspondant, puissance immédiatement inférieure au cube, pour septième quotient partiel, que nous plaçons sous le sixième, en avançant un chiffre vers la droite, par la raison que nous avons pris, en allant de gauche à droite, un chiffre du dividende. 8°. Nous soustrayons 3556224 de 3822526; le reste est 266302, qui est le huitième membre du dividende, dont nous pouvons ôter successivement 21168, le triple, et 49392, le septuple du quarré 7056, total 261072, le produit de 7056 multiplié par 37; nous prenons aussi successivement 252, le triple, 588, le septuple du diviseur 84, total 3108, le produit de 84 multiplié par 37, pour huitième quotient partiel, que nous plaçons directement sous le septième, parce que nous n'avons pris aucun chiffre du dividende. 9°. Nous soustrayons 261072 de 266302; le reste est 5230, qui est le neuvième membre du dividende, dont nous pouvons ôter successivement 504, le sextuple, 168, le double du diviseur 84, total 5208, le produit de 84 multiplié par 62, lequel, ôté de 5230, il reste 22; nous prenons $62\frac{22}{84}$ pour neuvième quotient partiel, que nous plaçons directement sous le huitième. 10°. Nous additionnons les quotiens partiels 7056, 7056, 42336, 21168, 49392, 14112, 42336, 3108, $62\frac{22}{84}$, selon l'ordre où ils sont placés, pour avoir $82112538\,26\frac{22}{84}$, le quotient total, qui est exactement celui du nombre 68974532 1406 divisé par 84.

PRÉCIS

Des règles de la multiplication et de la division.

Le tableau qui contient la formation des quarrés et des cubes sert à faciliter et à abréger la multiplication d'un nombre par un autre, puisqu'il suffit seulement de soustraire autant de fois qu'il est possible le quarré du multiplicateur considéré comme racine, du premier membre du multiplicande, et de prendre également autant de fois le cube correspondant pour premier produit partiel. Lorsque le reste du multiplicande est numériquement plus petit que le quarré, alors il faut en ôter le nombre suffisant du multiplicateur, et prendre le même nombre de fois le quarré correspondant pour second produit partiel. Le reste, qui ne peut pas être ôté du multiplicateur, comme plus grand, doit être multiplié par le multiplicateur, pour avoir le dernier produit partiel : le numérateur d'une fraction, en ôtant son dénominateur, est sa vraie valeur.

Ce tableau sert aussi à faciliter et à abréger la division d'un nombre par un autre, puisqu'il faut seulement soustraire, autant de fois qu'il est possible, le cube du diviseur, considéré comme racine, du premier membre du dividende, et de prendre également le même nombre de fois le quarré correspondant pour premier quotient partiel. Lorsque le reste du dividende ne peut pas être divisé par le cube, alors il faut le diviser le nombre de fois suffisant par le quarré du diviseur, et prendre autant de fois le diviseur pour second quotient partiel. Si le reste ne peut l'être que par le diviseur répété plusieurs fois, alors il faut placer autant d'unités pour dernier quotient partiel.

On place les produits et les quotiens partiels de manière qu'on fait, à chaque fois, dépasser d'un chiffre vers la droite ceux du précédent produit ou du précédent quotient, toutes

les fois qu'on a pris un chiffre du multiplicande ou du dividende; mais lorsque, dans l'un ou l'autre cas, on n'a pris aucun chiffre, alors les chiffres des produits ou des quotiens se placent directement sous les derniers. On a additionné les uns et les autres suivant l'ordre où ils sont placés.

Les exemples XI, XII, XIII et XIV, sur la division, sont une preuve certaine de l'exactitude du calcul fait dans les exemples VI, VII, VIII, IX, sur la multiplication, par la raison que leurs règles sont diamétralement opposées.

SECONDE MÉTHODE

De la formation des quarrés et des cubes.

Nous connaissons une seconde méthode de faire un tableau où les quarrés et les cubes sont formés, lequel sert à trouver les produits des nombres à multiplier par d'autres et les quotiens des nombres à diviser par d'autres. Ce tableau a cinq colonnes. La première contient les racines. La seconde, les termes de la série des différences entre les sommes des premiers et derniers termes des nombres nécessaires à former les cubes; nous observons que chaque terme de cette série égale le double du terme correspondant de la série primitive, et croît de quatre en quatre unités quand la racine croît d'unité en unité. La troisième, les sommes des premiers et derniers termes des nombres nécessaires à former les cubes, dont chacune se compose de l'addition de chaque terme correspondant de la série des différences et de la somme précédente; mais on comprendra aisément la manière de trouver chaque somme et d'apprécier son utilité, par l'exemple suivant. Si nous voulons avoir le cube de 11, la multiplication de 11, la racine correspondante, par 10, la racine précédente, produit, plus 1, 111, le premier terme; l'addition de 111, le

premier terme, et de 20, le double de 10, la racine précédente, fait 131, le dernier terme; 111 et 131, les premier et dernier termes, font la somme 242, laquelle multipliée par $5\frac{1}{2}$, la moitié de la racine 11, produit 1331, cube de 11; ainsi se compose chaque somme des premier et dernier termes des nombres propres à former les cubes. La quatrième, la moitié de chaque somme correspondante à chaque racine égale le quarré de chacune d'elles. La cinquième, chaque somme multipliée par la moitié de la racine correspondante, donne un produit qui est le cube de cette même racine.

DEUXIÈME TABLEAU

Sur la formation des quarrés et des cubes.

La progression génératrice des quarrés 1, 3, 5, etc., etc., sert à former les cubes.

1re col.	2e colonne.	3e colonne.	4e colonne.	5e colonne.
Racines.	Les termes correspond. et doubles de la série primitive composent les termes de la série des différ. entre les sommes, lesquels termes croissent de 4 en 4 unités quand les racin. croissent d'unité en unité.	Chaq. som. des prem. et dern. termes de ceux qui sont à calculer pour former chaque cube se compose de l'addit. de chaq. term. corresp. de la série des différ. et de la som. précéd.	La moitié de chaque somme correspondante à chaq. racine égale le quarré de chacune d'elles. Aussi, chaq. quarré doublé égale chaque som.	Chaque somme, multipliée par la moitié de la racine correspond., donne un produit qui est le cube de cette même racine.
Racines.	Termes de la série des différences.	Sommes.	Quarrés.	Cubes.
400	1598	320000	160000	64000000
401	1602	321602	160801	64481201
402	1606	323208	161604	64964808
403	1610	324818	162409	65450827

Racin.	Termes de la série des différ.	Sommes.	Quarrés.	Cubes.
404	1614	326432	163216	65939264
405	1618	328050	164025	66430125
406	1622	329672	164836	66923416
407	1626	331298	165649	67419143
408	1630	332928	166464	67917312
409	1634	334562	167281	68417929
410	1638	336200	168100	68921000
411	1642	337842	168921	69426531
412	1646	339488	169744	69934528
413	1650	341138	170569	70444997
414	1654	342792	171396	70957944
415	1658	344450	172225	71473375
416	1662	346112	173056	71991296
417	1666	347778	173889	72511713
418	1670	349448	174724	73034632
419	1674	351122	175561	73560059
420	1678	352800	176400	74088000
421	1682	354482	177241	74618461
422	1686	356168	178084	75151448
423	1690	357858	178929	75686967
424	1694	359552	179776	76225024
425	1698	361250	180625	76765625
426	1702	362952	181476	77308776
427	1706	364658	182329	77854483
428	1710	366368	183184	78402752
429	1714	368082	184041	78953589
430	1718	369800	184900	79507000
431	1722	371522	185761	80062991
432	1726	373248	186624	80621568
433	1730	374978	187489	81182737
434	1734	376712	188356	81746504
435	1738	378450	189225	82312875
436	1742	380192	190096	82881856
437	1746	381938	190969	83453453
438	1750	383688	191844	84027672

Racin.	Termes de la série des différ.	Sommes.	Quarrés.	Cubes.
439	1754	385442	192721	846045 19
440	1758	387200	193600	85184000
441	1762	388962	194481	85766121
442	1766	390728	195364	86350888
443	1770	392498	196249	86938307
444	1774	394272	197136	87528384
445	1778	396050	198025	88121125
446	1782	397832	198916	88716536
447	1786	399618	199809	89314623
448	1790	401408	200704	89915392
449	1794	403202	201601	90518849
450	1798	405000	202500	91125000
451	1802	406802	203401	91733851
452	1806	408608	204304	92345408
453	1810	410418	205209	92959677
454	1814	412232	206116	93576664
455	1818	414050	207025	94196375
456	1822	415872	207936	94818816
457	1826	417698	208849	95443993
458	1830	419528	209764	96071912
459	1834	421362	210681	96702579
460	1838	423200	211600	97336000
461	1842	425042	212521	97972181
462	1846	426888	213444	98611128
463	1850	428738	214369	99252847
464	1854	430592	215296	99897344
465	1858	432450	216225	100544625
466	1862	434312	217156	101194696
467	1866	436178	218089	101847563
468	1870	438048	219024	102503232
469	1874	439922	219961	103161709
470	1878	441800	220900	103823000
471	1882	443682	221841	104487111
472	1886	445568	222784	105154048
473	1890	447458	223729	105823817

Racin.	Termes de la série des différ.	Sommes.	Quarrés.	Cubes.
474	1894	449352	224676	106496424
475	1898	451250	225625	107171875
476	1902	453152	226576	107850176
477	1906	455058	227529	108531333
478	1910	456968	228484	109215352
479	1914	458882	229441	109902239
480	1918	460800	230400	110592000
481	1922	462722	231361	111284641
482	1926	464648	232324	111980168
483	1930	466578	233289	112678587
484	1934	468512	234256	113379904
485	1938	470450	235225	114084125
486	1942	472392	236196	114791256
487	1946	474338	237169	115501303
488	1950	476288	238144	116214272
489	1954	478242	239121	116930169
490	1958	480200	240100	117649000
491	1962	482162	241081	118370771
492	1966	484128	242064	119095488
493	1970	486098	243049	119823157
494	1974	488072	244036	120553784
495	1978	490050	245025	121287375
496	1982	492032	246016	122023936
497	1986	494018	247009	122763473
498	1990	496008	248004	123505992
499	1994	498002	249001	124251499
500	1998	500000	250000	125000000
501	2002	502002	251001	125751501
502	2006	504008	252004	126506008
503	2010	506018	253009	127263527
504	2014	508032	254016	128024064
505	2018	510050	255025	128787625
506	2022	512072	256036	129554216
507	2026	514098	257049	130323843
508	2030	516128	258064	131096512

Racin.	Termes de la série des différ.	Sommes.	Quarrés.	Cubes.
509	2034	518162	259081	131872229
510	2038	520200	260100	132651000
511	2042	522242	261121	133432831
512	2046	524288	262144	134217728
513	2050	526338	263169	135005697
514	2054	528392	264196	135796744
515	2058	530450	265225	136590875
516	2062	532512	266256	137388096
517	2066	534578	267289	138188413
518	2070	536648	268324	138991832
519	2074	538722	269361	139798359
520	2078	540800	270400	140608000
521	2082	542882	271441	141420761
522	2086	544968	272484	142236648
523	2090	547058	273529	143055667
524	2094	549152	274576	143877824
525	2098	551250	275625	144703125
526	2102	553352	276676	145531576
527	2106	555458	277729	146363183
528	2110	557568	278784	147197952
529	2114	559682	279841	148035889
530	2118	561800	280900	148877000
531	2122	563922	281961	149721291
532	2126	566048	283024	150568768
533	2130	568178	284089	151419437
534	2134	570312	285156	152273304
535	2138	572450	286225	153130375
536	2142	574592	287296	153990656
537	2146	576738	288369	154854153
538	2150	578888	289444	155720872
539	2154	581042	290521	156590819
540	2158	583200	291600	157464000
541	2162	585362	292681	158340421
542	2166	587528	293764	159220088
543	2170	589698	294849	160103007

Racin.	Termes de la série des différ.	Sommes.	Quarrés.	Cubes.
544	2174	591872	295936	160989184
545	2178	594050	297025	161878625
546	2182	596232	298116	162771336
547	2186	598418	299209	163667323
548	2190	600608	300304	164566592
549	2194	602802	301401	165469149
550	2198	605000	302500	166375000
551	2202	607202	303601	167284151
552	2206	609408	304704	168196608
553	2210	611618	305809	169112377
554	2214	613832	306916	170031464
555	2218	616050	308025	170953875
556	2222	618272	309136	171879616
557	2226	620498	310249	172808693
558	2230	622728	311364	173741112
559	2234	624962	312481	174676879
560	2238	627200	313600	175616000
561	2242	629442	314721	176558481
562	2246	631688	315844	177504328
563	2250	633938	316969	178453547
564	2254	636192	318096	179406144
565	2258	638450	319225	180362125
566	2262	640712	320356	181321496
567	2266	642978	321489	182284263
568	2270	645248	322624	183250432
569	2274	647522	323761	184220009
570	2278	649800	324900	185193000
571	2282	652082	326041	186169411
572	2286	654368	327184	187149248
573	2290	656658	328329	188132517
574	2294	658952	329476	189119224
575	2298	661250	330625	190109375
576	2302	663552	331776	191102976
577	2306	665858	332929	192100033
578	2310	668168	334084	193100552

Racin.	Termes de la série des différ.	Sommes.	Quarrés.	Cubes.
579	2314	670482	335241	194104539
580	2318	672800	336400	195112000
581	2322	675122	337561	196122941
582	2326	677448	338724	197137368
583	2330	679778	339889	198155287
584	2334	682112	341056	199176704
585	2338	684450	342225	200201625
586	2342	686792	343396	201230056
587	2346	689138	344569	202262003
588	2350	691488	345744	203297472
589	2354	693842	346921	204336469
590	2358	696200	348100	205379000
591	2362	698562	349281	206425071
592	2366	700928	350464	207474688
593	2370	703298	351649	208527857
594	2374	705672	352836	209584584
595	2378	708050	354025	210644875
596	2382	710432	355216	211708736
597	2386	712818	356409	212776173
598	2390	715208	357604	213847192
599	2394	717602	358801	214921799
600	2398	720000	360000	216000000

Première suite de la multiplication.

Ce second tableau de la formation des quarrés et des cubes produit les mêmes résultats que le premier, puisqu'il nous facilite et abrége également la manière de trouver les produits des nombres à multiplier par d'autres, et les quotiens des nombres à diviser par d'autres, et puisqu'on suit dans l'un et l'autre la même manière d'opérer.

En effet, 412 est la racine du quarré 169744 et du cube 69934528. Si nous multiplions le quarré 169744 par la ra-

cine 412, le produit sera nécessairement le cube 69934528; si nous divisons le cube 69934528 par la racine 412, le quotient sera nécessairement le quarré 169744.

560 est la racine du quarré 313600 et du cube 175616000. Si nous multiplions le quarré 313600 par la racine 560, le produit sera nécessairement le cube 175616000; si nous divisons le cube 175616000 par la racine 560, le quotient sera nécessairement le quarré 313600.

Comme nous voulons généraliser ces principes certains relatifs à la multiplication et à la division, c'est pourquoi il est indispensable de rappeler que, pour multiplier ou diviser un nombre par un autre, il devient essentiel d'élever successivement le multiplicateur et le diviseur, dont chacun est considéré comme racine, au quarré et au cube, afin de soustraire, à l'égard de la multiplication, le quarré du multiplicande ou d'une partie du multiplicande, et de prendre le cube correspondant pour produit; et de soustraire, à l'égard de la division, le cube du dividende ou d'une partie du dividende, et de prendre le quarré correspondant pour quotient.

EXEMPLE XV.

Multiplicand.	Le cube est le produit.	Le quarré est le 1er multiplicat.	La racine est le 2e multiplicat.
780258 $\frac{280}{436}$	82881856	190096	436
760384			Prod. partiels.
19874			331527424
1744			760384
2434			950480
2180.			110744
Le reste 254 multiplié par 436			280
égale 110744.		Prod. tot.	340192768.

Le numérat. 280 de la fraction $\frac{280}{436}$, dont on ôte le dénomin. 436, exprime sa vraie valeur.

Si nous voulons multiplier $780258\frac{280}{436}$ par 436, 1°. nous cherchons le cube du multiplicateur 436, considéré comme racine, qui est 82881856, et son quarré, qui est 190096; puis nous voyons que 760384, le quadruple de 190096, quarré de 436, peut être ôté de 780258, premier membre du multiplicande; nous prenons 331527424, le quadruple de 82881856, le cube correspondant, puissance immédiatement supérieure au quarré, pour premier produit partiel. 2°. Nous soustrayons 760384 de 780258, pour avoir le reste 19874, dont nous ne pouvons pas ôter le quarré 190096, comme numériquement trop grand, mais successivement 1744, le quadruple, et 2180, le quintuple, de 436, le multiplicateur, total 19620; nous prenons aussi successivement 760384, le quadruple, et 950480, le quintuple de 190096, le quarré de 436, puissance immédiatement supérieure à la précédente, total 8554320, pour second produit partiel, que nous plaçons directement sous le premier, parce que nous n'avons pris aucun chiffre du multiplicande. 3°. Nous soustrayons 19620 de 19874; le reste 254 est le troisième membre du multiplicande, que nous multiplions par 436, le multiplicateur, afin d'avoir 110744 pour troisième produit partiel, que nous plaçons directement sous le dernier, ainsi que 280, le numérateur de la fraction $\frac{280}{436}$, dont nous ôtons le dénominateur 436, afin de la réduire à sa vraie valeur dans ce calcul. 4°. Nous additionnons les produits partiels..... 331527424, 760384, 950480, 110744, 280, selon l'ordre où ils sont placés, pour avoir le produit total 340192768, qui est exactement celui du nombre $780258\frac{280}{436}$ multiplié par 436.

EXEMPLE XVI.

Multiplicande.	Le cube est le produit.	Le quarré est le 1er multiplicat.	La racine est le 2e multiplicat.
6153401531$\frac{186}{597}$	2127761 73	356409	597
4256 36			
897041			Produits partiels.
782045			85110 4692
149965			1063880865
069227			63832 8519
307383			42555 2346
112818			356409
94565			1782045
597			285 1272
3486			142683
2985			186
5015		Produit total.	964358071527.
4776.			

Le reste 239 multiplié par 597 égale 142683.

Le numérateur 186 de la fraction $\frac{186}{597}$, dont on a ôté le dénominat. 597, énonce sa vraie valeur.

Si nous voulons multiplier 1615340153 $\frac{186}{597}$ par 597, 1°. nous cherchons le cube du multiplicateur 597, considéré comme racine, qui est 212776173, et son quarré, qui est 356409; puis nous voyons que 1425636, le quadruple de 356409, quarré de 597, peut être ôté de 1615340, premier membre du multiplicande; nous prenons 851104692, le quadruple de 212776173, le cube correspondant, puissance immédiatement supérieure au quarré, pour premier produit partiel. 2°. Nous soustrayons 1425636 de 1615340, pour avoir le reste 189704, auquel nous joignons le chiffre 1;

1897041 est le second membre du multiplicande, duquel nous pouvons ôter 1782045, le quintuple du quarré 356409; nous prenons 1063880865, le quintuple du cube 212776173, pour second produit partiel, que nous plaçons sous le premier, de manière qu'il le dépasse d'un chiffre vers la droite. 3°. Nous soustrayons 1782045 de 1897041, pour avoir le reste 114996, auquel nous joignons le chiffre 5; 1149965 est le troisième membre du multiplicande, duquel nous pouvons ôter 1069227, le triple du quarré 356409; nous prenons 638328519, le triple du cube 212776173, pour troisième produit partiel, que nous plaçons sous le second, et qui le dépassera d'un chiffre vers la droite, par la raison que nous avons pris un chiffre du multiplicande. 4°. Nous soustrayons 1069227 de 1149965, pour avoir le reste 80738, auquel nous joignons le chiffre 3; 807383 est le quatrième membre du multiplicande, duquel nous pouvons ôter 712818, le double du quarré 356409; nous prenons 425552346, le double du cube 212776173, pour quatrième produit partiel, que nous plaçons sous le troisième, en avançant un chiffre vers la droite, parce que nous avons pris un chiffre du multiplicande. 5°. Nous soustrayons 712818 de 807383, pour avoir 94565, le cinquième membre du multiplicande, dont nous ne pouvons pas ôter le quarré 356409, comme numériquement trop grand, mais successivement 597, le multiplicateur, 2985, son quintuple, et 4776, son octuple, total 94326, lequel égale le produit de 597 multiplié par 158; nous prenons aussi successivement 356409, le quarré du multiplicateur 597, puissance immédiatement supérieure à la précédente, 1782045, son quintuple, 2851272, son octuple, total 56312622, lequel égale le produit du quarré 356409 multiplié par 158, pour cinquième produit partiel, qui doit être placé directement sous le quatrième, par la raison que nous n'avons pris aucun chiffre du multiplicande. 6°. Nous soustrayons 94336 de 94565, pour avoir 239, le sixième membre du multiplicande, lequel, multiplié par

597, fait 142683, le sixième produit partiel, que nous plaçons directement sous le cinquième, ainsi que le numérateur 186 de la fraction $\frac{186}{597}$, dont on a ôté le dénominateur 597, afin de la réduire à sa vraie valeur. 7°. Nous additionnons les produits partiels 851104692, 106388o865, 6383285l9, 425552346, 356409, 1782045, 2851272,... 142683, 186, suivant l'ordre où ils sont placés, pour avoir le produit total 964358071527, qui est exactement celui du nombre 161534053 $\frac{186}{597}$ multiplié par 597.

Première suite de la division.

Ce second tableau, qui nous a servi à obtenir les produits des nombres multipliés par d'autres, sert aussi à obtenir les quotiens des nombres divisés par d'autres. On trouve les produits dans les cubes du multiplicateur considéré comme racine, et les quotiens dans les quarrés du diviseur, aussi considéré comme racine : ou bien, pour nous expliquer plus distinctement, on trouve les produits des nombres multipliés par d'autres, dans les puissances immédiatement supérieures à celles qui ont servi à soustraire du multiplicande ou d'une partie du multiplicande; on trouve, par une raison inverse, les quotiens des nombres divisés par d'autres, dans les puissances immédiatement inférieures à celles qui ont servi à soustraire du dividende ou d'une partie du dividende.

430 est la racine du quarré 184900 et du cube 79507000. Si nous multiplions le quarré 184900 par la racine 430, le produit sera nécessairement le cube 79507000, si nous divisons 79507000 par la racine 430, le quotient sera nécessairement le quarré 184900.

524 est la racine du quarré 274576 et du cube 143877824. Si nous multiplions le quarré 274576 par la racine 524, le produit sera nécessairement le cube 143877824; si nous divisons le cube 143877824 par la racine 524, le quotient sera nécessairement le quarré 274576.

Les règles de la division sont diamétralement opposées à celles de la multiplication. Les règles de la multiplication et de la division sont les mêmes que celles que nous avons précédemment enseignées; elles peuvent s'appliquer à tous les exemples.

EXEMPLE XVII.

Dividende.	1er diviseur.	2e diviseur.	3e diviseur.
340192768	82881856	190096	436
331527424			
8665344		Quotiens partiels.	
8554320		760384	
111024		19620	
110744		$254\frac{280}{436}$	
$\frac{280}{436}$		780258 $\frac{280}{436}$.	

Pour diviser 340192768 par 436, 1°. nous cherchons le cube du diviseur 436, qui est 82881856, lequel quadruplé fait 331527424, et peut être ôté du dividende; nous prenons 760384, le quadruple de 190096, quarré correspondant, puissance immédiatement inférieure au cube, pour premier quotient partiel. 2°. Nous soustrayons 331527424 de ..... 340192768, le dividende; le reste est 8665344, le second membre du dividende, dont nous ne pouvons pas ôter le cube du diviseur 436, mais bien successivement 760384 le quadruple, et 950480, le quintuple du quarré 190096, total.. 8554320, qui égale le produit du quarré 190096 multiplié par 45; nous prenons aussi successivement 1744, le quadruple, 2180, le quintuple du diviseur 436, total 19620, qui égale le produit du diviseur 436 multiplié par 45, pour second quotient partiel, que nous plaçons directement sous le premier, par la raison que nous n'avons pris aucun chiffre du dividende; le placement des quotiens suivans aura la même direction. 3°. Nous soustrayons 8554320 de 8665344; le reste est 111024, le troisième membre du dividende, dont nous ne

pouvons pas ôter le quarré du diviseur 436, mais bien 872, le double, 2180, le quintuple, 1744, le quadruple du diviseur 436, lesquels égalent 110744, le produit du diviseur 436 multiplié par 254; nous prenons 254 pour troisième quotient partiel. 4°. Nous soustrayons 110744 de 111024; le reste est 280, qui ne peut être divisé; alors nous plaçons sous ce reste le diviseur 436 et nous avons la fraction $\frac{280}{436}$, que nous mettons à la suite du dernier quotient. 5°. Nous additionnons les quotiens partiels 760384, 19620 et 254 $\frac{280}{436}$, selon l'ordre où ils sont placés, pour avoir 780258 $\frac{280}{436}$, le quotient total, qui est exactement celui du nombre 340192768 divisé par 436.

EXEMPLE XVIII.

Dividende.	1er diviseur.	2e diviseur.	3e diviseur.
964358071527	212776173	356409	597
851104692			
113253379 5		Quotiens partiels.	
106388086 5		1425636	
6865293 02		1782045	
6383285 19		1069227	
4820078 37		712818	
4255523 46		92535	
5645549 1		1791	
5524339 5		239 $\frac{183}{597}$	
1212096	Quotient total.	1615340153 $\frac{183}{597}$.	
1069227			
142869			
142683			
$\frac{183}{597}$.			

Pour diviser 964358071527 par 597, 1°. nous cherchons le cube du diviseur 597, qui est 212776173, lequel quadruplé fait 851104692; nous prenons 1425636, le quadruple de 356409, quarré correspondant, pour premier quotient partiel. 2°. Nous soustrayons 851104692 de 964358071, premier

membre du dividende; le reste est 113253379, auquel nous ajoutons 5; 1132533795 est le second membre du dividende, duquel nous ôtons 1063880865, le quintuple du cube..... 212776173; nous prenons 1782045, le quintuple du quarré 356409, puissance inférieure au cube, pour second quotient partiel, que nous plaçons sous le premier en avançant un chiffre vers la droite, par la raison que nous avons pris un chiffre du dividende. Afin d'éviter les répétitions, nous observerons en général que lorsqu'on prend un chiffre du dividende, en ce premier cas, on place les chiffres du quotient partiel sous ceux du précédent, en sorte qu'il le dépasse d'un chiffre vers la droite; mais lorsqu'on ne prend aucun chiffre du dividende, en ce second cas, on place les chiffres du quotient partiel directement sous ceux du précédent, en sorte que les derniers chiffres de l'un et de l'autre se correspondent. 3°. Nous soustrayons 1063880865 de 1132533795; le reste est 68652930, auquel nous ajoutons 2; 686529302 est le troisième membre du dividende, duquel nous ôtons 63832819, le triple du cube 212776173; nous prenons 1069227, le triple du quarré 356409, pour troisième quotient partiel. 4°. Nous soustrayons 63832819 de 686529302; le reste est 48200783, auquel nous ajoutons 7, le dernier chiffre du dividende; 482007837 est le quatrième membre du dividende, duquel nous ôtons 425552346, le double du cube 212776173; nous prenons 712818, le double du quarré 356409, pour quatrième quotient partiel. 5°. Nous soustrayons 425552346 de 482007837; le reste est 56455491, duquel nous ne pouvons ôter le cube, mais bien successivement le quarré... 356409, 1782045 le quintuple, puis 1782045, le quintuple du quarré 356409, total 5524339 5, lequel égale le produit du quarré 356409 multiplié par 155; nous prenons le diviseur 597, 2985, le quintuple, puis 2985, le quintuple de 597, total 92535, lequel égale le produit de 597 multiplié par 155, pour cinquième produit partiel. 6°. Nous soustrayons 55243395 de 56455491; le reste est 1212096, du-

quel nous pouvons ôter 1069227, le triple du quarré 356409; nous prenons 1791, le triple du diviseur 597, pour sixième quotient partiel. 7°. Nous soustrayons 1069227 de 1212096; le reste est 142869, duquel nous ne pouvons ôter le quarré 356409, mais bien 1194, le double, 1791, le triple, 5373, le nonuple du diviseur 597; nous prenons $239\frac{186}{597}$, pour septième quotient partiel. 8°. Nous additionnons les quotiens partiels 1425636, 1782045, 1069227, 712818, 92535,.. 1791, $239\frac{186}{597}$, selon l'ordre où ils sont placés, pour avoir $161534015\frac{186}{597}$, le quotient total, qui est exactement celui du nombre 964358071527 divisé par 597.

TROISIÈME MÉTHODE

De la formation des quarrés et des cubes.

Nous faisons un tableau relatif à cette troisième méthode de former les quarrés et les cubes, afin de trouver avec autant de brièveté que de facilité les produits des nombres à multiplier par d'autres, et les quotiens des nombres à diviser par d'autres. Mais afin d'employer les règles que nous avons précédemment enseignées et de se servir de ce tableau pour faire la multiplication et la division, il est indispensable d'élever chaque multiplicateur considéré comme racine, et chaque diviseur, aussi considéré comme racine, successivement à leur quarré et à leur cube.

Ce troisième tableau sur la formation des quarrés et des cubes, fait pour abréger et faciliter la multiplication ou la division d'un nombre par un autre, a cinq colonnes : la première contient les racines; la seconde, la progression génératrice des quarrés, que nous appelons aussi la *série primitive;* la troisième, les quarrés formés par l'addition successive des termes de la série primitive; la quatrième, les différences

entre les cubes dont chacune est le résultat du triple quarré de la racine correspondante, moins sa racine triplée plus 1; la cinquième, les cubes dont chaque différence et chaque cube de la racine précédente sommés forment le cube de la racine correspondante.

TROISIÈME TABLEAU

Sur la formation des quarrés et des cubes.

La progression génératrice des quarrés 1, 3, 5, 7, etc., etc., sert à former les cubes.

1re COL.	2e COLONNE.	3e COLONNE.	4e COLONNE.	5e COLONNE.
Racines.	Progression générat. des quarrés, que nous appelons aussi série primitive.	Les quarrés sont formés par l'addition successive des termes de la série primitiv.	Le triple quarré de la racine correspondante moins sa racine triplée plus 1 égale la différence des cubes des deux racines correspondante et précédente.	Chaque différence et chaque cube de la racine précédente, sommés, forment le cube de la racine correspondante.
Racines.	Série primitive.	Quarrés.	Différences entre les cubes.	Cubes.
600	1199	360000	1078201	216000000
601	1201	361201	1081801	217081801
602	1203	362404	1085407	218167208
603	1205	363609	1089019	219256227
604	1207	364816	1092637	220348864
605	1209	366025	1096261	221445125
606	1211	367236	1099891	222545016
607	1213	368449	1103527	223648543
608	1215	369664	1107169	224755712
609	1217	370881	1110817	225866529
610	1219	372100	1114471	226981000
611	1221	373321	1118131	228099131

Racin.	Série primitive.	Quarrés.	Différences entre les cubes.	Cubes.
612	1223	374644	1121797	229210928
613	1225	375769	1125469	230346397
614	1227	376996	1129147	231475544
615	1229	378225	1132831	232608375
616	1231	379456	1136521	233744896
617	1233	380689	1140217	234885113
618	1235	381924	1143919	236029032
619	1237	383161	1147627	237176659
620	1239	384400	1151341	238328000
621	1241	385651	1155061	239483061
622	1243	386884	1158787	240641848
623	1245	388129	1162519	241804367
624	1247	389376	1166257	242970624
625	1249	390625	1170001	244140625
626	1251	391876	1173751	245314376
627	1253	393129	1177507	246491883
628	1255	394384	1181269	247673152
629	1257	395641	1185037	248858189
630	1259	396900	1188811	250047000
631	1261	398161	1192591	251239591
632	1263	399424	1196377	252435968
633	1265	400689	1200169	253636137
634	1267	401956	1203967	254840104
635	1269	403225	1207771	256047875
636	1271	404496	1211581	257259456
637	1273	405769	1215397	258474853
638	1275	407044	1219219	259694072
639	1277	408321	1223047	260917119
640	1279	409600	1226881	262144000
641	1281	410881	1230721	263374721
642	1283	412164	1234567	264609288
643	1285	413449	1238419	265847707
644	1287	414736	1242277	267089984
645	1289	416025	1246141	268336125
646	1291	4173	1250011	269586136

Racin.	Série primitive.	Quarrés.	Différences entre les cubes.	Cubes.
647	1293	418609	1253887	270840023
648	1295	419904	1257769	272097792
649	1297	421201	1261657	273359449
650	1299	422500	1265551	274625000
651	1301	423801	1269451	275894451
652	1303	425104	1273375	277167808
653	1305	426409	1277269	278445077
654	1307	427716	1281187	279726264
655	1309	429025	1285111	281011375
656	1311	430336	1289041	282300416
657	1313	431649	1292977	283593393
658	1315	432964	1296919	284890312
659	1317	434281	1300867	286191179
660	1319	435600	1304821	287496000
661	1321	436921	1308781	288804781
662	1323	438244	1312747	290117528
663	1325	439569	1316719	291434247
664	1327	440896	1320697	292754944
665	1329	442225	1324681	294079625
666	1331	443556	1328671	295408296
667	1333	444889	1332667	296740963
668	1335	446224	1336669	298077632
669	1337	447561	1340677	299418309
670	1339	448900	1344691	300763000
671	1341	450241	1348711	302111711
672	1343	451584	1352737	303464448
673	1345	452929	1356769	304821217
674	1347	454276	1360807	306182024
675	1349	455625	1364851	307546875
676	1351	456976	1368901	308915776
677	1353	458329	1372957	310288733
678	1355	459684	1377019	311665752
679	1357	461041	1381087	313046839
680	1359	462400	1385161	314432000
681	1361	463761	1389241	315821241

Racin.	Série primitive.	Quarrés.	Différences entre les cubes.	Cubes.
682	1363	465124	1393327	317214568
683	1365	466489	1397419	318611987
684	1367	467856	1401517	320013504
685	1369	469225	1405621	321419125
686	1371	470596	1409731	322828856
687	1373	471969	1413847	324242703
688	1375	473344	1417969	325660672
689	1377	474721	1422097	327082769
690	1379	476100	1426231	328509000
691	1381	477481	1430371	329939371
692	1383	478864	1434517	331373888
693	1385	480249	1438669	332812557
694	1387	481636	1442827	334255384
695	1389	483025	1446991	335702375
696	1391	484416	1451161	337153536
697	1393	485809	1455337	338608873
698	1395	487204	1459519	340068392
699	1397	488601	1463707	341532099
700	1399	490000	1467901	343000000
701	1401	491401	1472101	344472101
702	1403	492804	1476307	345948408
703	1405	494209	1480519	347428927
704	1407	495616	1484737	348913664
705	1409	497025	1488961	350402625
706	1411	498436	1493191	351895816
707	1413	499849	1497427	353393243
708	1415	501264	1501669	354894912
709	1417	502681	1505917	356400829
710	1419	504100	1510171	357911000
711	1421	505521	1514431	359425431
712	1423	506944	1518697	360944128
713	1425	508369	1522969	362467097
714	1427	509796	1527247	363994344
715	1429	511225	1531531	365525875
716	1431	512656	1535821	367061696

Racin.	Série primitive.	Quarrés.	Différences entre les cubes.	Cubes.
717	1433	514089	1540117	3686018 13
718	1435	515524	1544419	3701462 32
719	1437	516961	1548727	3716949 59
720	1439	518400	1553041	3732480 00
721	1441	519841	1557361	3748053 61
722	1443	521284	1561687	3763670 48
723	1445	522729	1566019	3779330 67
724	1447	524176	1570357	3795034 24
725	1449	525625	1574701	3810781 25
726	1451	527076	1579051	3826571 76
727	1453	528529	1583407	3842405 83
728	1455	529984	1587769	3858283 52
729	1457	531441	1592137	3874204 89
730	1459	532900	1596511	3890170 00
731	1461	534361	1600891	3906178 91
732	1463	535824	1605277	3922231 68
733	1465	537289	1609669	3938328 37
734	1467	538756	1614067	3954469 04
735	1469	540225	1618471	3970653 75
736	1471	541696	1622881	3986882 56
737	1473	543169	1627297	4003155 53
738	1475	544644	1631719	4019472 72
739	1477	546121	1636147	4035834 19
740	1479	547600	1640581	4052240 00
741	1481	549081	1645021	4068690 21
742	1483	550564	1649467	4085184 88
743	1485	552049	1653919	4101724 07
744	1487	553536	1658377	4118307 84
745	1489	555025	1662841	4134936 25
746	1491	556516	1667311	4151609 36
747	1493	558009	1671787	4168327 23
748	1495	559504	1676269	4185089 92
749	1497	561001	1680757	4201897 49
750	1499	562500	1685251	4218750 00
751	1501	564001	1689751	4235647 51

Racin.	Sétie primitive.	Quarrés.	Différences entre les cubes.	Cubes.
752	1503	565504	1694257	425259008
753	1505	567009	1698769	426957777
754	1507	568516	1703287	428661064
755	1509	570025	1707811	430368875
756	1511	571536	1712341	432081216
757	1513	573049	1716877	433798093
758	1515	574564	1721419	435519512
759	1517	576081	1725967	437245479
760	1519	577600	1730521	438976000
761	1521	579121	1735081	440711081
762	1523	580644	1739647	442450728
763	1525	582169	1744219	444194947
764	1527	583696	1748797	445943744
765	1529	585225	1753381	447697125
766	1531	586756	1757971	449455096
767	1533	588289	1762567	451217663
768	1535	589824	1767169	452984832
769	1537	591361	1771777	454756609
770	1539	592900	1776391	456533000
771	1541	594441	1781011	458314011
772	1543	595984	1785637	460099648
773	1545	597529	1790269	461889917
774	1547	599076	1794907	463684824
775	1549	600675	1799551	465484375
776	1551	602176	1804201	467288576
777	1553	603729	1808857	469097433
778	1555	605284	1813519	470910952
779	1557	606841	1818187	472729139
780	1559	608400	1822861	474552000
781	1561	609961	1827541	476379541
782	1563	611524	1832227	478211768
783	1565	613089	1836919	480048687
784	1567	614656	1841617	481890304
785	1569	616225	1846321	483736625
786	1571	617796	1851031	485587656

Racin.	Série primitive.	Quarrés.	Différences entre les cubes.	Cubes.
787	1573	619369	1855747	487443403
788	1575	620944	1860469	489303872
789	1577	622521	1865197	491169069
790	1579	624100	1869931	493039000
791	1581	625681	1874671	494913671
792	1583	627264	1879417	496793088
793	1585	628849	1884169	498677257
794	1587	630436	1888927	500566184
795	1589	632025	1893691	502459875
796	1591	633616	1898461	504358336
797	1593	635209	1903237	506261573
798	1595	636804	1908019	508169592
799	1597	638401	1912807	510082399
800	1599	640000	1917601	512000000

Seconde suite de la multiplication.

Ce troisième tableau sur la formation des quarrés et des cubes nous fait abréger et faciliter les règles de la multiplication, en ce que le quarré du multiplicateur, soit simple, soit doublé, soit triplé, soit quadruplé, etc., peut être ôté aisément du premier membre du multiplicande, et en ce que le cube correspondant du même multiplicateur, pris le même nombre de fois que le quarré, est le premier produit partiel. Nous opérons ainsi à l'égard des autres membres du multiplicande, et nous suivons les mêmes principes que ceux que nous avons suivis au sujet des deux premiers tableaux : quoique ces trois tableaux soient différens sur la manière de former les quarrés et les cubes, néanmoins ils produisent les mêmes résultats.

En effet, 604 est la racine du quarré 364816 et du cube 220348864. Si nous multiplions le quarré 364816 par la ra-

ême 604, le produit sera nécessairement le cube..... 220348864.

625 est la racine du quarré 390625 et du cube 244140625. Si nous multiplions le quarré 390625 par la racine 625, le produit sera nécessairement le cube 244140625.

Comme nous voulons généraliser ces principes certains, relatifs à la multiplication, il est essentiel de considérer le multiplicateur comme racine et de l'élever successivement au quarré et au cube, afin de pouvoir multiplier un nombre par un autre.

EXEMPLE XIX.

Multiplicand.	Le cube est le produit.	Le quarré est le 1er multiplicat.	La racine est le 2e multiplicat.
723689 $\frac{584}{653}$	278445077	426409	653
426409			
297280			Prod. partiels.
255845			278445077
41435			167067046
3918	414002 est la		255845
2255	somme de		127922
1959	3918		170563
2961	1959		22789
2612.	2612.		584
Le reste 349 multiplié par 653 produit 227897.		Prod. total.	472569301

Si nous voulons multiplier 723689 $\frac{584}{653}$ par 653, 1°. nous cherchons le cube du multiplicateur 653, considéré comme racine, qui est 278445077, et son quarré, qui est 426409, puis nous voyons que 426409, le quarré, peut être ôté de 723689, premier membre du multiplicande; nous prenons 278445077, le cube correspondant, pour premier produit partiel. 2°. Nous soustrayons 426409 de 723689, pour avoir

le reste 297280, auquel nous joignons le chiffre 5; 2972805 est le second membre du multiplicande, duquel nous pouvons ôter 2558454, le sextuple du quarré 426409; nous prenons 1670670452, le sextuple du cube correspondant 278445077, pour second produit partiel, que nous plaçons sous le premier, en avançant un chiffre vers la droite, par la raison que nous avons pris, en allant de gauche à droite, un chiffre du multiplicande. 3°. Nous soustrayons 2558454 de 2972805, pour avoir le reste 414351, lequel est le troisième membre du multiplicande, dont nous pouvons ôter successivement 3918, le sextuple, 1959, le triple, 2612, le quadruple du multiplicateur 653, total 414002, qui égale le produit de 653 multiplié par 634; nous prenons aussi successivement 2558454, le sextuple, 1279227, le triple, 1705636, le quadruple du quarré correspondant 426409, puissance immédiatement supérieure à la précédente, pour troisième produit partiel, que nous plaçons directement sous le second, parce que nous n'avons pris aucun chiffre du multiplicande. 4°. Nous soustrayons 414002 de 414351, pour avoir le reste 349, lequel multiplié par 653 fait 227897, le quatrième produit partiel, que nous plaçons directement sous le troisième. 5°. Le numérateur 584 de la fraction $\frac{584}{653}$, dont on ôte le dénominateur 653, est sa vraie valeur dans ce calcul. 6°. Nous additionnons les produits partiels..... 278445077, 1670670462, 2558454, 1279227, 1705636, 227897, 584, selon l'ordre où ils sont placés, pour avoir le produit total 472569301 9, qui est exactement celui du nombre 723689 5 $\frac{584}{653}$ multiplié par 653.

EXEMPLE XX.

Multiplicand.	Le cube est le produit.	Le quarré est le 1er multiplicat.	La racine est le 2e multiplicat.
$824602399\frac{562}{798}$	508169592	636804	798
636864			
1877983			Prod. partiels.
1273608			508169592
6043759			1016339184
5731236			457352632 8
3125239			203267836 8
2547216			44576 28
578023			12736 08
5586	577752 est la		254721 6
1942	somme de		21625 8
1596	5586		56 2
3463	1596	Prod. total.	658032714964.
3192.	3192.		

Le reste 271 multiplié par 798 produit 216258.

Si nous voulons multiplier $824602399\frac{562}{798}$ par 798, 1°. nous cherchons le cube du multiplicateur 798, considéré comme racine, qui est 508169592, et son quarré, qui est 636804; puis nous voyons que 636804, le quarré, peut être ôté de 824602, premier membre du multiplicande; nous prenons 508169592, le cube correspondant, pour premier produit partiel. 2°. Nous soustrayons 636804 de 824602, pour avoir le reste 187798, auquel nous joignons le chiffre 3; 1877983 est le second membre du multiplicande, duquel nous pouvons ôter 1273608, le double du quarré 636804; nous prenons 1016339184, le double du cube correspondant..... 508169592, pour second produit partiel, que nous plaçons sous le premier, en avançant un chiffre vers la droite. 3°. Nous

soustrayons 1273608 de 1877983, pour avoir le reste 604375, auquel nous joignons le chiffre 9; 6043759 est le troisième membre du multiplicande, duquel nous pouvons ôter 57312 36, le nonuple du quarré 636804; nous prenons 457352 63 28, le nonuple du cube correspondant 508169592, pour troisième produit partiel, que nous plaçons sous le second, en avançant un chiffre vers la droite. 4°. Nous soustrayons 57312 36 de 6043759, pour avoir le reste 312523, auquel nous joignons le chiffre 9; 3125239 est le quatrième membre du multiplicande, duquel nous pouvons ôter 2547216, le quadruple du quarré 636804; nous prenons 2032678368, le quadruple du cube correspondant 508169592, pour quatrième produit partiel, que nous plaçons sous le troisième, en avançant un chiffre vers la droite. 5°. Nous soustrayons 2547216 de 3125239, pour avoir le reste 578023, lequel est le cinquième membre du multiplicande, duquel nous ne pouvons pas ôter le quarré 636804, comme numériquement trop grand, mais successivement 5586, le septuple, 1596, le double, et 3192, le quadruple du multiplicateur 798, total 577752, lequel égale le produit de 798 multiplié par 724; nous prenons aussi successivement 4457628, le septuple, 1273608, le double, et 2547216, le quadruple du quarré 636804, puissance immédiatement supérieure à la précédente, total 461046096, lequel égale le produit du quarré 636804 multiplié par 724, pour cinquième produit partiel, que nous plaçons directement sous le quatrième. 6°. Nous soustrayons 577752 de 578023, pour avoir le reste 271, le sixième membre du multiplicande, lequel, étant multiplié par 798, fait 216258, le sixième produit partiel, que nous plaçons directement sous le dernier, ainsi que le numérateur 562 de la fraction $\frac{562}{798}$, dont on a ôté le dénominateur 798, afin de la réduire à sa vraie valeur dans ce calcul. 7°. Nous additionnons les produits partiels 508169592, 101633918 4, ... 457352 63 28, 2032678368, 4457628, 1273608, 2547216, la somme de ces trois derniers nombres fait 461046096, le

cinquième produit partiel 2162581562, selon l'ordre où ils sont placés, pour avoir le produit total 658032714964, qui est exactement celui du nombre $824602399\frac{565}{798}$ multiplié par 798.

EXEMPLE XXI.

Multiplicand.	Le cube est le produit.	Le quarré est le 1er multiplicat.	La racine est le 2e multiplicat.
8569847320 6	13144256	55696	236

55696			
300024			Produits partiels.
278480			13144256
215447			65721280
167088			39432768
483593			10515 4048
445568			7886 5536
380252			10515 4048
334176			2628851 2
460760			55696
445568			389872
151926			55696
111392			42008
40534		Prod. total.	2022483967661 6.
236	40356 est la		
1693	somme de		
1652	236		
414	1652		
236.	236.		

Le reste 178 multiplié par 236 produit 42008.

Pour multiplier le nombre 8569847320 6 par 236, 1°. nous cherchons le cube du multiplicateur 236, qui est 13144256, et son quarré, qui est 55696; puis nous voyons que 55696, le quarré, peut être ôté de 85698, le premier membre du mul-

tiplicande; nous prenons 13144256, le cube correspondant, pour premier produit partiel. 2°. Nous soustrayons 55696 de 85698, pour avoir le reste 30002, auquel nous joignons le chiffre 4; 300024 est le second membre du multiplicande, duquel nous pouvons ôter 278480, le quintuple du quarré 55696; nous prenons 65721280, le quintuple du cube.... 13144256, pour second produit partiel, que nous plaçons sous le premier, en avançant un chiffre vers la droite. Lorsqu'on a pris un chiffre du multiplicande, on avance le dernier chiffre du produit partiel; mais lorsqu'on ne prend plus de chiffre du multiplicande, on place directement tous les chiffres du produit partiel sous ceux du dernier produit. 3°. Nous soustrayons 278480 de 300024, pour avoir le reste 21544, auquel nous joignons le chiffre 7; 215447 est le troisième membre du multiplicande, duquel nous pouvons ôter 167088, le triple du quarré 55696; nous prenons 394327 68, le triple du cube correspondant 13144256, pour troisième produit partiel. 4°. Nous soustrayons 167088 de 215447, pour avoir le reste 48359, auquel nous joignons le chiffre 3; 483593 est le quatrième membre du multiplicande, duquel nous pouvons ôter 445568, l'octuple du quarré 55696; nous prenons 105154048, l'octuple du cube correspondant..... 13144256, pour quatrième produit partiel. 5°. Nous soustrayons 445568 de 483593, pour avoir le reste 38025, auquel nous joignons le chiffre 2; 380252 est le cinquième membre du multiplicande, duquel nous pouvons ôter 334176, le sextuple du quarré 55696; nous prenons 78865536, le sextuple du cube correspondant 13144256, pour cinquième produit partiel. 6°. Nous soustrayons 334176 de 380252, pour avoir le reste 46076, auquel nous joignons le zéro 0; 460760 est le sixième membre du multiplicande, duquel nous pouvons ôter 445568, l'octuple du quarré 55696; nous prenons 105154048, l'octuple du cube correspondant 13144256, pour sixième produit partiel. 7°. Nous soustrayons 445568 de 460760, pour avoir le reste 15192, auquel nous joignons le

chiffre 6; 151926 est le septième membre du multiplicande, duquel nous pouvons ôter 111392, le double du quarré 55696; nous prenons 26288512, le double du cube correspondant 13144256, pour septième produit partiel. 8°. Nous soustrayons 111392 de 151926, pour avoir le reste 40534, lequel est le huitième membre du multiplicande, dont nous ne pouvons pas ôter le quarré 55696, comme numériquement plus grand, mais successivement 236, le multiplicateur, 1652, le septuple du multiplicateur, et 236, le multiplicateur, total 40356, qui est le produit de 236 multiplié par 171, lequel étant ôté de 40534, il reste 178; nous prenons aussi successivement 55696, le quarré correspondant au multiplicateur 236, 389872, le septuple du même quarré, et 55696, total 9524016, qui est le produit du quarré 55696 multiplié par 171, lequel est le huitième produit partiel; le reste 178, multiplié par 236, égale 42008 et se place après le dernier produit partiel. 9°. Nous additionnons les produits partiels 13144256, ... 65721280, 394332768, 1051154048, 78865536, 1051154048, 26288512, 55696, 389872, 55696, 42008, selon l'ordre où ils sont placés, pour avoir 2022483967616, le produit total, qui est exactement celui du nombre 8569847306 multiplié par 236.

EXEMPLE XXII.

Multiplicand.	Le cube est le produit.	Le quarré est le 1er multiplicat.	La racine est le 2e multiplicat.
8569847320 6	504358336	633616	796

633616
2233687
1900848
3328393
3168080
1603132
1267232
3359000
3168080
1909206
1900848
8358
7164
1197
796.

Produits partiels.
504358336
1513075008
2521791680
1008716672
2521791680
1513075008
5702544
633616
316808
Produit total. 682159846 71976.

Le reste 398 multiplié par 798 produit 316608.

Pour multiplier le même nombre 8569847320 6 par 796, 1°. nous cherchons le cube du multiplicateur 796, considéré comme racine, qui est 504358336, et son quarré, qui est 633616; puis nous voyons que 633616 peut être ôté de 856984, premier membre du multiplicande; nous prenons 504358336, le cube correspondant, pour premier produit partiel. 2°. Nous soustrayons 633616 de 856984, pour avoir le reste 223368, auquel nous joignons le chiffre 7; 2233687 est le second membre du multiplicande, duquel nous pouvons pouvons ôter 1900848, le triple du quarré 633616; nous prenons 1513075008, le triple du cube correspondant 504358336, pour second produit partiel, que nous

plaçons sous le premier, en avançant un chiffre vers la droite. 3°. Nous soustrayons 1900848 de 2233687, pour avoir le reste 332839, auquel nous joignons le chiffre 3 ; 3328393 est le troisième membre du multiplicande, duquel nous pouvons ôter 3168080, le quintuple du quarré 633616 ; nous prenons 2521791680, le quintuple du cube correspondant 504358336, pour troisième produit partiel, que nous plaçons sous le second, en avançant un chiffre vers la droite. 4°. Nous soustrayons 3168080 de 3328393, pour avoir le reste 160313, auquel nous joignons le chiffre 2 ; 1603132 est le quatrième membre du multiplicande, duquel nous pouvons ôter... 1267232, le double du quarré 633616 ; nous prenons... 1008716672, le double du cube correspondant 504358336, pour quatrième produit partiel, que nous plaçons sous le troisième, en avançant un chiffre vers la droite. 5°. Nous soustrayons 1267232 de 1603132, pour avoir le reste 335900, auquel nous joignons le zéro 0 ; 3359000 est le cinquième membre du multiplicande, duquel nous pouvons ôter... 3168080, le quintuple du quarré 633616 ; nous prenons 2521791680, le quintuple du cube correspondant 504358336, pour cinquième produit partiel, que nous plaçons sous le quatrième, en avançant un chiffre vers la droite. 6°. Nous soustrayons 3168080 de 3359000, pour avoir le reste 190920, auquel nous joignons le chiffre 6 ; 1909206 est le sixième membre du multiplicande, duquel nous pouvons ôter... 1900848, le triple du quarré 633616 ; nous prenons... 1513075008, le triple du cube correspondant 504358336, pour sixième produit partiel, que nous plaçons sous le cinquième, en avançant un chiffre vers la droite. 7°. Nous soustrayons 1900848 de 1909206, pour avoir le reste 8358, lequel est le septième membre du multiplicande, dont nous ne pouvons pas ôter le quarré 633616, comme numériquement plus grand, mais 7146, le nonuple du multiplicateur 794 ; nous prenons 5702544, le nonuple du quarré 633616, pour septième produit partiel, que nous plaçons directe-

ment sous le sixième. 8°. Nous soustrayons 7164 de 8358, pour avoir le reste 1194, lequel est le huitième membre du multiplicande, dont nous pouvons ôter 794; nous prenons 633616, le quarré, puissance immédiatement supérieure à la précédente, pour huitième produit partiel, que nous plaçons directement sous le septième, ainsi que 316808, le produit du reste 398 multiplié par 796. 9°. Nous additionnons les produits partiels 504358336, 1512075008, 2521791680, 1008716672, 2521791680, 1518075008, 5702544, 633616, 316808, pour avoir le produit total.... 6821598471976, qui est exactement celui du nombre 8569847306 multiplié par 796.

Seconde suite de la division.

Aussi ce troisième tableau sur la formation des quarrés et des cubes nous fait abréger et faciliter les règles de la division, en ce que le cube du diviseur, soit simple, soit doublé, soit triplé, soit quadruplé, etc., peut être ôté aisément du premier membre du dividende, et en ce que le quarré correspondant du même diviseur, pris le même nombre de fois que le cube, est le premier quotient partiel. Nous opérons ainsi à l'égard des autres membres du dividende, et nous suivons les mêmes principes que ceux que nous avons suivis au sujet des deux premiers tableaux. Quoique ces trois tableaux soient différens sur la manière de former les quarrés et les cubes, néanmoins ils produisent les mêmes résultats.

En effet, 614 est la racine du quarré 376996 et du cube 231475544. Si nous multiplions le quarré 376996 par la racine 614, le produit sera nécessairement le cube 231475544; si nous divisons le cube 231475544 par la racine 614, le quotient sera nécessairement le quarré 376996.

763 est la racine du quarré 582169 et du cube 444194947. Si nous multiplions le quarré 582169 par la racine 763, le produit sera nécessairement le cube 444194947; si nous di-

visons le cube 444194947 par la racine 763, le quotient sera nécessairement le quarré 582169.

Comme nous voulons généraliser ces principes certains relatifs à la division, il est essentiel de considérer le diviseur comme racine et de l'élever successivement au quarré et au cube, afin de pouvoir diviser commodément et sûrement un nombre quelconque par un autre.

EXEMPLE XXIII.

Dividende.	1er diviseur.	2e diviseur.	3e diviseur.
472569301	278445077	426409	653
278445077			
194124224			Quotiens partiels.
167067046			426409
27057178			2558454
25584			3918
1472638			1959
1279227			2612
193411			$349\frac{584}{653}$
170563		Quotient total.	$723689\frac{584}{653}$.
22848			
1958			
3258			
2612			
6461			
5877			
$\frac{584}{653}$.			

Pour diviser 472569301 par 655, 1°. nous cherchons le cube de 653, le diviseur considéré comme racine, qui est 278445077, lequel peut être ôté une fois de 472569301, premier membre du dividende; nous prenons une fois... 426409, quarré correspondant, puissance immédiatement inférieure au cube, pour premier quotient partiel. 2°. Nous soustrayons 278445077 de 472569301, premier membre du

dividende ; le reste est 194124224, auquel nous joignons le chiffre 9; 1941242249 est le second membre du dividende, duquel nous pouvons ôter 1670670462, le sextuple du cube 278445077; nous prenons 2558454, le sextuple du quarré 426409, puissance immédiatement inférieure au cube, pour second quotient partiel, que nous plaçons sous le premier, en avançant un chiffre vers la droite, par la raison que nous avons pris, en allant de gauche à droite, un chiffre du dividende. 3°. Nous soustrayons 1670670462 de 1941242249; le reste est 270571787, dont nous ne pouvons ôter le cube 278445077, comme numériquement plus grand, mais bien en trois reprises, le quarré 426409; ainsi nous ôtons.... 2558454, le sextuple du quarré 426409, de 2705717, la première partie du reste, 127922, le triple du même quarré, de 1472638, la seconde partie du reste, et 1705636, le quadruple aussi du même quarré, de 1934117, la troisième partie du reste; ainsi nous prenons successivement 3918, le sextuple, 1959, le triple, et 2612, le quadruple de 653, le diviseur, pour quotiens partiels; puis nous plaçons ces trois nombres de manière que le dernier ne dépasse pas les chiffres du second quotient. 4°. Nous soustrayons 1705636, le quadruple du quarré 426409, de 1934117, la troisième partie du reste; la différence est 228481, dont nous ne pouvons pas ôter le quarré 426409, comme numériquement plus grand; ainsi nous ôtons 1959, le triple du diviseur 653, de 2284, la première partie de la différence, 2616, le quadruple du même diviseur, de 3258, la seconde partie de la même différence, et 5877, le nonuple du même diviseur, de 6461, la troisième partie de la même différence; comme nous devons mettre au quotient partiel autant d'unités que de fois nous avons soustrait du quatrième et dernier membre du dividende le diviseur 653, alors nous plaçons $349\frac{584}{653}$ pour quatrième et dernier quotient partiel. 5°. Nous additionnons les quotiens partiels 426409, 2558454, 3918, 1959, 2612, $349\frac{584}{653}$, selon l'ordre où ils sont placés, pour avoir

723689$5\frac{114}{653}$, le quotient total, qui est exactement celui du nombre 472569301 9 divisé par 653.

EXEMPLE XXIV.

Dividende.	1er diviseur.	2e diviseur.	3e diviseur.
658032714964	508169592	636804	798

508169592

1498631229

1016339184

482292045 6

457352632 8

249394128 4

203267836 8

46126291 6

4457628

1550011

1273608

2764036

2547216

216820

1596

5722

5586

1360

798

$\frac{562}{798}$.

Quotiens partiels.

636804

1273608

573123 6

254721 6

5586

1596

3192

271 $\frac{562}{798}$

Quotient total. 824602399 $\frac{562}{798}$.

Pour diviser 658032714964 par 798, 1°. nous cherchons le cube et le quarré de 798, considéré comme racine; nous ôtons 508169592, le cube de 798, le diviseur, de 658032714, premier membre du dividende; nous prenons 636804, quarré du même diviseur, puissance immédiatement inférieure au cube, pour premier quotient partiel. 2°. Nous soustrayons 508169592 de 658032714; le reste est 149863122,

auquel nous joignons le chiffre 9; 1498631229 est le second membre du dividende, duquel nous pouvons ôter 1016339184, le double du cube 508169592; nous prenons 1273608, le double du quarré 636804, pour second quotient partiel, que nous plaçons sous le premier, en avançant un chiffre vers la droite, par la raison que nous avons pris, en allant de gauche à droite, un chiffre du dividende. 3°. Nous soustrayons... 1016339184 de 1498631229; le reste est 482292045, auquel nous joignons le chiffre 6; 4822920456 est le troisième membre du dividende, duquel nous pouvons ôter... 4573526828, le nonuple du cube 508169592; nous prenons 5731236, le nonuple du quarré 636804, pour troisième quotient partiel, que nous plaçons sous le second, en avançant un chiffre vers la droite, parce que nous avons pris, en allant de gauche à droite, un chiffre du dividende. 4°. Nous soustrayons 4573526328 de 4822920456; le reste est 249394128, auquel nous joignons le chiffre 4;... 2493941284 est le quatrième membre du dividende, duquel nous pouvons ôter 2032678368, le quadruple du cube... 508169592; nous prenons 2547216, le quadruple du quarré 636804, pour quatrième quotient partiel, que nous plaçons sous le troisième, en avançant un chiffre vers la droite, parce que nous avons pris, en allant de gauche à droite, un chiffre du dividende. 5°. Nous soustrayons 2032678368 de 2493941284; le reste 461262916 est le cinquième membre du dividende, duquel nous ne pouvons pas ôter le cube 508169592, comme numériquement plus grand, mais bien 4457628, le septuple, puis 1273608, le double, et 2547216, le quadruple du quarré 646804, total 461046096; nous prenons 5586, 1596, 3192, trois nombres placés conformément au tableau, pour quotiens partiels. 6°. Nous soustrayons 461046096 de 461262916; le reste 216820 est le sixième membre du dividende, duquel nous pouvons ôter successivement 1596, le double, 5586, le septuple de 798, plus 798; nous prenons 271, qui égale le nombre de fois que

diviseur 798 a servi à diviser ce dernier membre du dividende, et nous mettons à la suite du dernier quotient partiel la fraction $\frac{562}{798}$, la différence de 216258, la somme de 596, 5586 et 798, et de 216820, le sixième membre du dividende. 7°. Nous additionnons les quotiens partiels 368804, 1273608, 5731236, 2547216, 5586, 1596, 8192, 71 $\frac{562}{798}$, selon l'ordre où ils sont placés, pour avoir... 24602399 $\frac{562}{798}$, le quotient total, qui est exactement celui du nombre 658032714964 divisé par 798.

EXEMPLE XXV.

Dividende.	1er diviseur.	2e diviseur.	3e diviseur.
1022483967661 6	13144256	55696	236
13144256			
70805836		Quotiens partiels.	
65721280		55696	
50845567		278480	
39432768		167088	
11412799 6		445568	
10515404 8		334176	
8973948 6		445568	
7886553 6		111392	
10873950 1		236	
10515404 8		1652	
3585453 6		236	
2628851 2		178	
9566024	Quotient total.	856984732 06.	
55696			
399642			
389872			
97704			
55696			
42008			
236			
1840			
1652			
1888			
1888.			

Pour diviser 20224839676616 par 236, 1°. nous cherchons le cube et le quarré de 236, considéré comme racine; nous ôtons 13144256, le cube de 236, le diviseur, de... 20224839, premier membre du dividende; nous prenons 55696, quarré du même diviseur, pour premier quotient partiel. 2°. Nous soustrayons 13144256 de 20224839, pour avoir 7080583, auquel nous joignons le chiffre 6; 70805836 est le second membre du dividende, duquel nous pouvons ôter 65721280, le quintuple du cube 13144256; nous prenons 278480, le quintuple du quarré 55696 correspondant, pour second quotient partiel, que nous plaçons sous le premier, en avançant un chiffre vers la droite. 3°. Nous soustrayons 65721280 de 70805836, pour avoir 5084556, auquel nous joignons le chiffre 7; 50845567 est le troisième membre du dividende, duquel nous pouvons ôter 39432768, le triple du cube 13144256; nous prenons 167088, le triple du quarré 55696, pour troisième quotient partiel, que nous plaçons sous le second, en avançant un chiffre vers la droite. 4°. Nous soustrayons 39432768 de 50845567, pour avoir 11412799, auquel nous joignons le chiffre 6; 114127996 est le quatrième membre du dividende, duquel nous pouvons ôter 105154048, l'octuple du cube 13144256; nous prenons... 445568, l'octuple du quarré 55696, pour quatrième quotient partiel, que nous plaçons sous le troisième, en avançant un chiffre vers la droite. 5°. Nous soustrayons 105154048 de 114127996, pour avoir 8973948, auquel nous joignons le chiffre 6; 89739486 est le cinquième membre du dividende, duquel nous pouvons ôter 78865536, le sextuple du cube 13144256; nous prenons 334176, le sextuple du quarré 55696, pour cinquième quotient partiel, que nous plaçons sous le quatrième, en avançant un chiffre vers la droite. 6°. Nous soustrayons 78865536 de 89739486, pour avoir 10873950, auquel nous joignons le chiffre 1; 108739501 est le sixième membre du dividende, duquel nous pouvons ôter 105154048, l'octuple du cube 13144256; nous prenons

445568, l'octuple du quarré 55696, pour sixième quotient partiel, que nous plaçons sous le cinquième, en avançant un chiffre vers la droite. 7°. Nous soustrayons 10515404 8 de 108739501, pour avoir 3585453, auquel nous joignons le chiffre 6; 35854536 est le septième membre du dividende, duquel nous pouvons ôter 26288512, le double du cube 13144256; nous prenons 111392, le double du quarré..... 55696, pour septième quotient partiel, que nous plaçons sous le sixième, en avançant un chiffre vers la droite. 8°. Nous soustrayons 26288512 de 35854536, pour avoir 9566024, le huitième membre du dividende, dont nous ne pouvons pas ôter le cube 13144256, comme numériquement trop grand, mais successivement 55696, le quarré, 389872, le sextuple du même quarré, et 55696, le même quarré, total 9524016, qui égale le produit du quarré 55696 multiplié par 171; nous prenons successivement 236, le diviseur, 1652, le sextuple du même diviseur, et 236, le même diviseur, total 40356, qui égale le produit de 236 multiplié par 171, lequel est le huitième quotient partiel, que nous plaçons directement sous le septième. 9°. Nous soustrayons 9524016 de 9566024, pour avoir le reste 42008, le neuvième membre du dividende, dont nous pouvons ôter successivement 236, le diviseur, 1652, le septuple du même diviseur, et 1888, l'octuple du même diviseur, total 42008; nous plaçons sous les derniers chiffres 178, qui expriment le nombre de fois dont nous nous sommes servi du diviseur 236 pour diviser le reste 42008. 10°. Nous additionnons les quotiens partiels 55696, 278480, 167088, 445568, 334176, 445568, 111392, 236, 1652, 236, 178, selon l'ordre où ils sont placés, pour avoir le quotient total 856984732 06, qui est exactement celui du nombre 202248396766 16 divisé par 236.

EXEMPLE XXVI.

Dividende.	1er diviseur.	2e diviseur.	3e diviseur.
682159846719 76	504358336	633616	796
504358336			
1778015107		Quotiens partiels.	
1513075008		633616	
264940099 1		1900848	
252179168 0		3168080	
12760931 19		1267232	
10087166 72		3168080	
2673764477		1900848	
2521791680		796	
151972797 6		398	
1513075008	Quotient total.	856984732 06.	
6652968			
633616			
316808			
2388			
7800			
7164			
6368			
6368.			

Pour diviser 682159846719 76 par 796, 1°. nous cherchons le cube et le quarré de 796, considéré comme racine; nous ôtons 504358336, le cube de 796, le diviseur, de 682159846, premier membre du dividende; nous prenons 633616, quarré du même diviseur, pour premier quotient partiel. 2°. Nous soustrayons 504358336, de 682159846, pour avoir 177801510; auquel nous joignons le chiffre 7; 1778015107 est le second membre du dividende, duquel nous pouvons ôter 1513075008, le triple du cube 504358336; nous prenons 1900848, le triple de 633616, quarré correspondant, pour second quotient partiel, que nous plaçons sous le pre-

mier, en avançant un chiffre vers la droite. 3°. Nous soustrayons 1513075008 de 17780151097, pour avoir 264940099, auquel nous joignons le chiffre 1; 2649400991 est le troisième membre du dividende, duquel nous pouvons ôter 2521791680, le quintuple du cube 504358336; nous prenons 3168080, le quintuple du quarré 633616, pour troisième quotient partiel, que nous plaçons sous le second, en avançant un chiffre vers la droite. 4°. Nous soustrayons 2521791680 de 2649400991, pour avoir 127609311, auquel nous joignons le chiffre 9; 1276093119 est le quatrième membre du dividende, duquel nous pouvons ôter..... 1008716672, le double du cube 504358336; nous prenons 1267232, le double du quarré 633616, pour quatrième quotient partiel, que nous plaçons sous le troisième, en avançant un chiffre vers la droite. 5°. Nous soustrayons..... 1008716672 de 1276093119, pour avoir 267376447, auquel nous joignons le chiffre 7; 2673764477 est le cinquième membre du dividende, duquel nous pouvons ôter 2521791680, le quintuple du cube 504358336; nous prenons 3168080, le quintuple du quarré 633616, pour cinquième quotient partiel, que nous plaçons sous le quatrième, en avançant un chiffre vers la droite. 6°. Nous soustrayons 2521791680 de 2673764477, pour avoir 151972797, auquel nous joignons le chiffre 6; 1519727976 est le sixième membre du dividende, duquel nous pouvons ôter 1513075008, le triple du cube 504358336; nous prenons 1900848, le triple du quarré 633616, pour sixième quotient partiel, que nous plaçons sous le cinquième, en avançant un chiffre vers la droite. 7°. Nous soustrayons 1513075008 de 1519727976, pour avoir.., 6652968, le septième membre du dividende, dont nous ne pouvons pas ôter le cube 504358336, comme numériquement trop grand, mais le quarré 633616; nous prenons le diviseur 796 pour le septième quotient partiel, que nous plaçons sous le sixième, de manière que le dernier chiffre ne dépasse pas l'avant-dernier chiffre du sixième, par la

raison qu'il reste le chiffre 8 de 6652968, le septième membre du dividende. 8°. Nous soustrayons 633616 de... 6652968, pour avoir 316808, le huitième membre du dividende, dont nous ne pouvons pas ôter le quarré 633616, comme numériquement trop grand, mais successivement 2388, le triple, 7164, le nonuple, 6368, l'octuple du diviseur 796; nous prenons 398, qui exprime le nombre de fois dont nous nous sommes servi du diviseur 798, pour diviser le reste 316808, pour huitième quotient partiel, que nous plaçons directement sous les trois derniers du sixième quotient. 9°. Nous additionnons les quotiens partiels 633616, 1900848, 3168080, 1267232, 3168080, 1900848, 796, 398, selon l'ordre où ils sont placés, pour avoir le quotient total 8569847320 6, qui est exactement celui du nombre 6821598467 1976 divisé par 798.

PRÉCIS

Des règles de la multiplication et de la division.

Les trois tableaux qui contiennent la formation des quarrés et des cubes produisent les mêmes résultats, et servent à faciliter la multiplication d'un nombre par un autre et la division d'un nombre par un autre.

Pour multiplier un nombre par un autre, il faut soustraire, autant de fois qu'il est possible, le quarré du multiplicateur, considéré comme racine, du premier membre du multiplicande, et prendre également autant de fois le cube correspondant pour premier produit partiel. On opère ainsi à l'égard des autres membres du multiplicande. Lorsque la portion restante du multiplicande est numériquement plus petite que le quarré, alors il faut en ôter le nombre suffisant du multiplicateur, et prendre le même

nombre de fois, le quarré correspondant pour produit partiel. Le reste, qui ne peut pas être ôté du multiplicateur, doit être multiplié par le multiplicateur, pour avoir le dernier produit partiel.

Ces trois tableaux servent aussi à faciliter la division d'un nombre par un autre. Pour faire cette seconde règle, qui est l'inverse de la première, il faut soustraire, autant de fois qu'il est possible, le cube du diviseur, considéré comme racine, du premier membre du dividende, et prendre également le même nombre de fois le quarré correspondant pour premier quotient partiel. On opère de même à l'égard des autres membres du dividende. Lorsque la première portion restante du dividende est numériquement plus petite que le cube, alors il faut en ôter le nombre suffisant du quarré correspondant, et prendre le même nombre de fois le diviseur pour quotient partiel; puis, lorsque la seconde portion restante du dividende est numériquement plus petite que le quarré, alors il faut en ôter le nombre suffisant du diviseur, et prendre autant d'unités que de fois on a pris le diviseur pour quotient partiel. Enfin, le reste, qui ne peut être divisé, devient le numérateur de la fraction qui a pour dénominateur le diviseur.

En général, nous observons que, dans la multiplication et la division, les produits partiels et les quotiens partiels se placent de gauche à droite, de manière que le dernier chiffre de chacun d'eux dépasse d'un chiffre celui du produit partiel ou du quotient partiel, qui est immédiatement supérieur, toutes les fois que nous prenons un chiffre du multiplicande ou du dividende; mais lorsqu'on ne prend aucun chiffre du multiplicande ou du dividende, dans ce cas, nous plaçons les chiffres, soit du produit partiel, soit du quotient partiel, directement sous chacun des derniers chiffres des précédens.

Afin de faciliter davantage les règles de la multiplication

et de la division faites d'après notre méthode, il nous paraît utile d'additionner le cube, le quarré, chaque multiplicateur considéré comme racine, et le cube, le quarré et chaque diviseur considéré comme racine, par les neuf chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, puisque cette addition nous fait aisément trouver le produit d'un nombre multiplié par un autre, comme aussi le quotient d'un nombre divisé par un autre. Dès que le multiplicateur égale le diviseur, une seule addition du cube, du quarré et de la racine, représentant l'un et l'autre, suffit. D'ailleurs, la seconde règle sert à vérifier l'exactitude de la première; de même, la première sert à vérifier l'exactitude de la seconde, ainsi qu'il est facile de s'en convaincre selon ces trois chiffres 2, 4, 8, qui sont en progression géométrique, et dont nous avons fait le fondement de notre calcul, par la raison que 4 multiplié par 2 égale le produit 8, et 8 divisé par 2 égale le quotient 4; que nous voyons évidemment que 4, le multiplicande, égale 4, le quotient, et que, dans tous les exemples de la multiplication et de la division, le résultat doit être nécessairement le même.

Quoique l'explication des règles de notre méthode sur la multiplication et la division paraisse longue, néanmoins, lorsque ces mêmes règles sont bien connues, chaque opération sur chaque nombre à multiplier ou à diviser est aussi facile que brève.

Les cubes, les quarrés et les racines des nombres à multiplier ou à diviser, successivement additionnés comme les neuf premiers chiffres, facilitent chaque opération.

PREMIER TABLEAU.

L'addition successive du cube 97336, du quarré 2116 et de la racine 46, par les neuf premiers chiffres, fait aisément trouver 978534, le produit du nombre 21272 $\frac{22}{46}$ multiplié par 46, de l'exemple VI, et 21272 $\frac{22}{47}$, le quotient du

nombre 978534 divisé par 46, de l'exemple XI. Comme le produit de la première règle de l'exemple VI devient le dividende de la seconde règle de l'exemple XI, alors le multiplicande de l'une est nécessairement le quotient de l'autre ; ainsi le calcul de ces deux règles est bien fait.

Numéros.	Cubes.	Quarrés.	Racines.
1	97336	2116	46
2	194672	4232	92
3	292008	6348	138
4	389344	8464	184
5	486680	10580	230
6	584016	12696	276
7	681352	14812	322
8	778688	16928	368
9	876024	19044	414

DEUXIÈME TABLEAU.

L'addition successive du cube 941192, du quarré 9604 et de la racine 98, par les neuf premiers chiffres, fait aisément trouver 78402752, le produit du nombre 800028 $\frac{8}{98}$ multiplié par 98, de l'exemple VII, et 800028 $\frac{8}{98}$, le quotient du nombre 78402752 divisé par 98, de l'exemple XII. Comme le produit de la première règle de l'exemple VII devient le dividende de la seconde règle de l'exemple XII, alors le multiplicande de l'une est nécessairement le quotient de l'autre; ainsi le calcul de ces deux règles est bien fait.

Numéros.	Cubes.	Quarrés.	Racines.
1	941192	9604	98
2	1882384	19208	196
3	2823576	28812	294
4	3764768	38416	392
5	4705960	48020	490
6	5647152	57624	598
7	6588344	67228	686
8	7529536	76832	784
9	8470728	86436	882

TROISIÈME TABLEAU.

L'addition successive du cube 16194277, du quarré 64009 et de la racine 253, par les neuf premiers chiffres, fait aisément trouver 864831902, le produit du nombre..... 34183081 $\frac{9}{253}$ multiplié par 253, de l'exemple VIII, et 34183081 $\frac{9}{253}$, le quotient du nombre 864831902 divisé par 253, de l'exemple XIII. Comme le produit de la première regle de l'exemple VIII devient le dividende de la seconde règle de l'exemple XIII, alors le multiplicande de l'une est nécessairement le quotient de l'autre; ainsi le calcul de ces deux règles est bien fait.

Numéros.	Cubes.	Quarrés.	Racines.
1	16194277	64009	253
2	32388554	128018	506
3	48582831	192027	759
4	64777108	256036	1012
5	80971385	320045	1265
6	97165662	384054	1518
7	113359939	448063	1771
8	129554216	512072	2024
9	145748493	576081	2277

QUATRIÈME TABLEAU.

L'addition successive du cube 592704, du quarré 7056 et de la racine 84, par les neuf premiers chiffres, fait aisément trouver 6897453214o6, le produit du nombre..... 8211253826 $\frac{84}{84}$ multiplié par 84, de l'exemple IX, et 8211253826 $\frac{84}{84}$, le quotient du nombre 6897453214o6 divisé par 84, de l'exemple XIV. Comme le produit de la première règle de l'exemple IX devient le dividende de la seconde règle de l'exemple XIV, alors le multiplicande de l'une est nécessairement le quotient de l'autre; ainsi le calcul de ces deux règles est bien fait.

Numéros.	Cubes.	Quarrés.	Racines.
1	592704	7056	84
2	1185408	14112	168
3	1778112	21168	252
4	2370816	28224	336
5	2963520	35280	420
6	3556224	42336	504
7	4148928	49392	588
8	4741632	56448	672
9	5334236	63504	756

CINQUIÈME TABLEAU.

L'addition successive du cube 82881856, du quarré 190096 et de la racine 436, par les neuf premiers chiffres, fait aisément trouver 340192768, le produit du nombre 780258 $\frac{280}{436}$ multiplié par 436, de l'exemple X, et..... 780258 $\frac{280}{436}$, le quotient du nombre 340192768 divisé par 436, de l'exemple XV. Comme le produit de la première règle de l'exemple X devient le dividende de la seconde

règle de l'exemple XV, alors le multiplicande de l'une est nécessairement le quotient de l'autre ; ainsi le calcul de ces deux règles est bien fait.

Numéros.	Cubes.	Quarrés.	Racines.
1	82881856	190096	436
2	165763712	380192	872
3	248645568	570288	1308
4	331527424	760384	1744
5	41440928o	950480	2180
6	49729113 6	1140576	2616
7	58o172992	1330672	3052
8	663054848	1520768	3488
9	745936704	1710864	3924

SIXIÈME TABLEAU.

L'addition successive du cube 212776173, du quarré 356409 et de la racine 597, par les neuf premiers chiffres, fait aisément trouver 964358071527, le produit du nombre 161534o153 $\frac{186}{597}$ multiplié par 597, de l'exemple XI, et 161534o153 $\frac{186}{597}$, le quotient du nombre 964358071527 divisé par 597, de l'exemple XVI. Comme le produit de la première règle de l'exemple XI devient le dividende de la seconde règle de l'exemple XVI, alors le multiplicande de l'une est nécessairement le quotient de l'autre ; ainsi le calcul de ces deux règles est bien fait.

Numéros.	Cubes.	Quarrés.	Racines.
1	212776173	356409	597
2	425552346	712818	1194
3	638328519	1069227	1791
4	851104692	1425636	2388
5	1063880865	1782045	2985
9	1276657038	2138454	3582
7	1489433211	2494863	4179
8	1702209384	2851272	4776
9	1914985557	3207681	5373

SEPTIÈME TABLEAU.

L'addition successive du cube 278445077, du quarré 426409 et de la racine 653, par les neuf premiers chiffres, fait aisément trouver 4725693019, le produit du nombre $7236895\frac{584}{653}$ multiplié par 653, de l'exemple XII, et..... $7236895\frac{584}{653}$, le quotient du nombre 4725693019 divisé par 653, de l'exemple XVII. Comme le produit de la première règle de l'exemple XII devient le dividende de la seconde règle de l'exemple XVII, alors le multiplicande de l'une est nécessairement le quotient de l'autre; ainsi le calcul de ces deux règles est bien fait.

Numéros.	Cubes.	Quarrés.	Racines.
1	278445077	426409	653
2	5568901 54	852818	1306
3	835335231	1279227	1959
4	1113780308	1705636	2612
5	1392225385	2132045	3265
6	1670670462	2558454	3918
7	1949115539	2984863	4571
8	2227560616	3411272	5224
9	2506005693	3837681	5877

HUITIÈME TABLEAU.

L'addition successive du cube 508169592, du quarré 636804 et de la racine 798, par les neuf premiers chiffres, fait aisément trouver 6580327 14964, le produit du nombre 824602399 $\frac{562}{798}$ multiplié par 798, de l'exemple XIII, et 824602399 $\frac{562}{798}$, le quotient du nombre 6580327 14964 divisé par 798, de l'exemple XVIII. Comme le produit de la première règle de l'exemple XIII devient le dividende de la seconde règle de l'exemple XVIII, alors le multiplicande de l'une est nécessairement le quotient de l'autre; ainsi le calcul de ces deux règles est bien fait.

Numéros.	Cubes.	Quarrés.	Racines.
1	508169592	636804	798
2	1016339184	1273608	1596
3	1524508776	1910412	2394
4	2032678368	2547216	3192
5	2540847960	3184020	3990
6	3049017552	3820824	4788
7	3557187144	4457628	5586
8	4065356736	5094432	6384
9	4573526328	5731236	7182

NEUVIÈME TABLEAU.

L'addition successive du cube 13144256, du quarré 58696 et de la racine 236, par les neuf premiers chiffres, fait aisément trouver 2022483967 6616, le produit du nombre 8569847320 6 multiplié par 236, de l'exemple XIV, et 8569847320 6, le quotient du nombre 2022483967 6616 divisé par 236, de l'exemple XIX. Comme le produit de la

première règle de l'exemple XIV devient le dividende de la seconde règle de l'exemple XIX, alors le multiplicande de l'une est nécessairement le quotient de l'autre; ainsi le calcul de ces deux règles est bien fait.

Numéros.	Cubes.	Quarrés.	Racines.
1	13144256	55696	236
2	26288512	111392	472
3	39432768	167088	708
4	52577024	222784	944
5	65721280	278480	1180
6	78865536	334176	1416
7	92009792	389872	1652
8	105154048	445568	1888
9	118298304	501264	2124

DIXIEME TABLEAU.

L'addition successive du cube 504358336, du quarré 633616 et de la racine 796, par les neuf premiers chiffres, fait aisément trouver 682159846 71976, le produit du nombre 8569847 3206 multiplié par 796, de l'exemple XV, et 8569847 3206, le quotient du nombre 682159846 71976 divisé par 796, de l'exemple XX. Comme le produit de la première règle de l'exemple XV devient le dividende de la seconde règle de l'exemple XX, alors le multiplicande de l'une est nécessairement le quotient de l'autre; ainsi le calcul de ces deux règles est bien fait.

Numéros.	Cubes.	Quarrés.	Racines.
1	504358336	633616	796
2	1008716672	1267232	1592
3	1513075008	1900848	2388
4	2017433344	2534464	3184
5	2521791680	3168080	3980
6	3026150016	3801696	4776
7	3530508352	4435312	5572
8	4034866688	5068928	6368
9	4539225024	5702544	7164

Quand on a fait les règles de la multiplication et de la division d'après des lois qui leur sont particulières, il est bon de s'assurer si elles sont exactes ou non. Or, il est utile de rappeler cette loi générale, la base principale de la multiplication et de la division, comprise dans ces trois chiffres 2, 4, 8, qui sont en progression géométrique; cette loi générale, considérée sous le rapport de la multiplication, veut que 4 multiplié par 2 produise 8, et, considérée sous le rapport de la division, que 8 divisé par 2 donne pour quotient 4. Nous voyons bien évidemment que le produit 8, qui résulte du multiplicande 4 multiplié par 2, le multiplicateur, devient le dividende 8 divisé par 2, le diviseur; ainsi 2, le multiplicateur, égalant 2, le diviseur; 8, le produit, égalant 8, le dividende; donc 4, le multiplicande, doit égaler 4, le quotient.

La multiplication est la preuve de la division, comme la division est la preuve de la multiplication; ainsi, il nous paraît nécessaire de se conformer aux règles précédemment établies sur la multiplication et la division, et de suivre les dispositions et l'ordre ci-dessus exprimés, afin d'avoir les

mêmes résultats, et par cela même d'être certain si elles sont bien faites.

Remarques finales.

Telles sont les découvertes contenues dans cet ouvrage, et placées dans l'ordre qu'elles se sont présentées à notre esprit.

Nous avons découvert les progressions génératrices des neuf premières puissances; ces neuf séries étant additionnées successivement produisent ces mêmes puissances : ainsi, l'addition remplace la multiplication pour leur formation. Mais quoique ces neuf séries soient les principes originaux des neuf premières puissances, elles nous présentent de nombreuses et insurmontables difficultés pour trouver chacune de ces puissances et leurs racines dans des nombres donnés; aussi, pour les résoudre et même pour les rendre plus faciles, nous avons découvert que la première progression 1, 3, 5, 7, etc., est la source féconde de leur génération, puisque, étant calculée d'après des règles appropriées à chaque puissance, elle produit toutes les puissances et nous fait extraire leurs racines. Peut-être toutes ces découvertes, que nous jugeons être basées sur des principes fondamentaux, contribueront-elles à discréditer certaines théories profondément obscures; peut-être aussi coopèreront-elles à faire abandonner des méthodes vraiment fastidieuses par l'emploi des règles longues et difficiles; peut-être enfin concourront-elles à simplifier d'utiles connaissances et à augmenter leur sphère. Cette aimable simplicité, toujours née d'une lumière directe et facile qui éclaire bien notre entendement, satisfait notre esprit, plaît à notre imagination et contente notre raison, fait discerner le vrai d'avec le faux,

approfondir, résoudre et même abandonner les difficultés qui se rencontrent dans les théories et les méthodes, pour les remplacer par des principes tellement lumineux, que les sciences physiques et mathématiques pourront devenir très aisées à comprendre, trouver beaucoup d'amateurs, et ainsi se propager.

FIN.

Errata.

Page 7, ligne 14, 54, *lisez* 64
13, 26, 396 (racine), *lisez* 296
14, 13, 363 (racine), *lisez* 353
49, 19, (art. III), 150000, *lisez* 15000000
58, 10, 4226 (quarré), *lisez* 4225
194, 17, 179999880 (progress. général.), *lisez* 179999886
216, 7, de 2699999640000020, *lisez* de 269999964000001200
463, 13, la fraction $\frac{1}{89}$, *lisez* la fraction $\frac{8}{89}$
466, 22, le sextuple, *lisez* le septuple
466, 23, le sextuple, *lisez* le septuple
515, 7, 79336 (cube), *lisez* 97336
477, 21, exemple XV, *lisez* exemple X
479, 1, exemple XVI, *lisez* exemple XI
482, 6, exemple XVII, *lisez* exemple XV
483, 13, exemple XVIII, *lisez* exemple XVI
493, 11, exemple XIX, *lisez* exemple XII
495, 1, exemple XX, *lisez* exemple XIII
497, 5, exemple XXI, *lisez* exemple XIV
500, 1, exemple XXII, *lisez* exemple XV
503, 8, exemple XXIII, *lisez* exemple XVII
505, 3, exemple XXIV, *lisez* exemple XVIII
507, 10, exemple XXV, *lisez* exemple XIX
510, 1, exemple XXVI, *lisez* exemple XX

Acme
Bookbinding Co., Inc.
100 Cambridge St.
Charlestown, MA 02129

QA40 .B37
Méthodes nouvelles et faciles de ca
Cabot Science
AEZ4286
3 2044 000 203 307

QA49 .B37
Methodes nouvelles et faciles de ca
Cabot Science
AEZ4255
3 2044 000 203 307